



臨床検査統計学へのアプローチ

北海道がんセンター 技師長 志保 裕行

統計学の実際

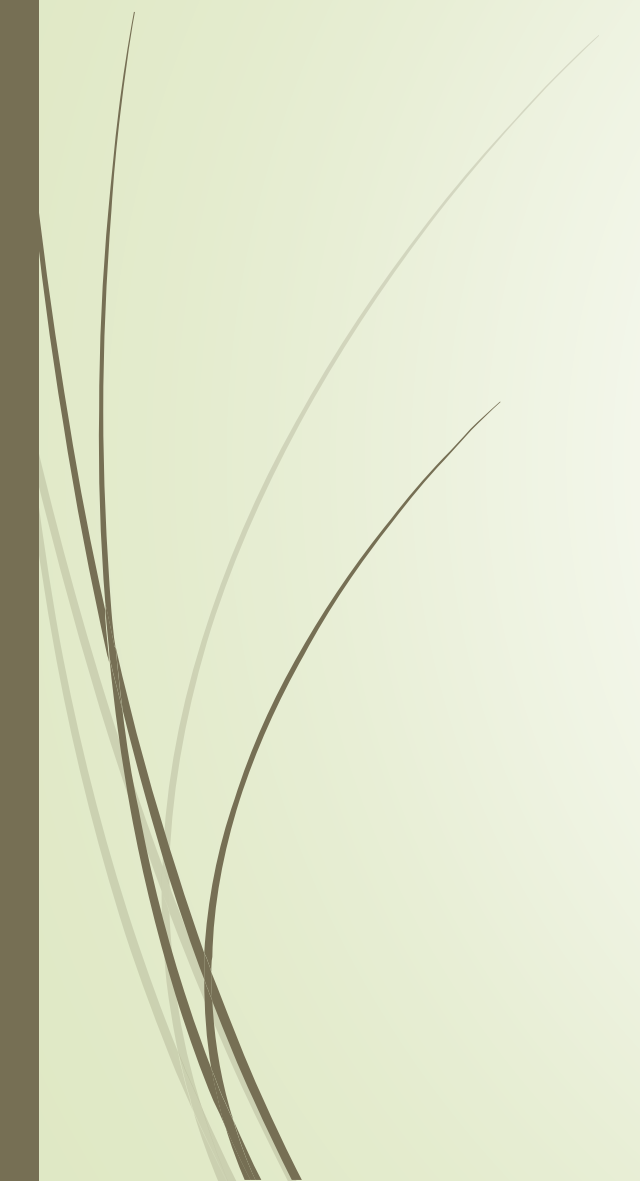


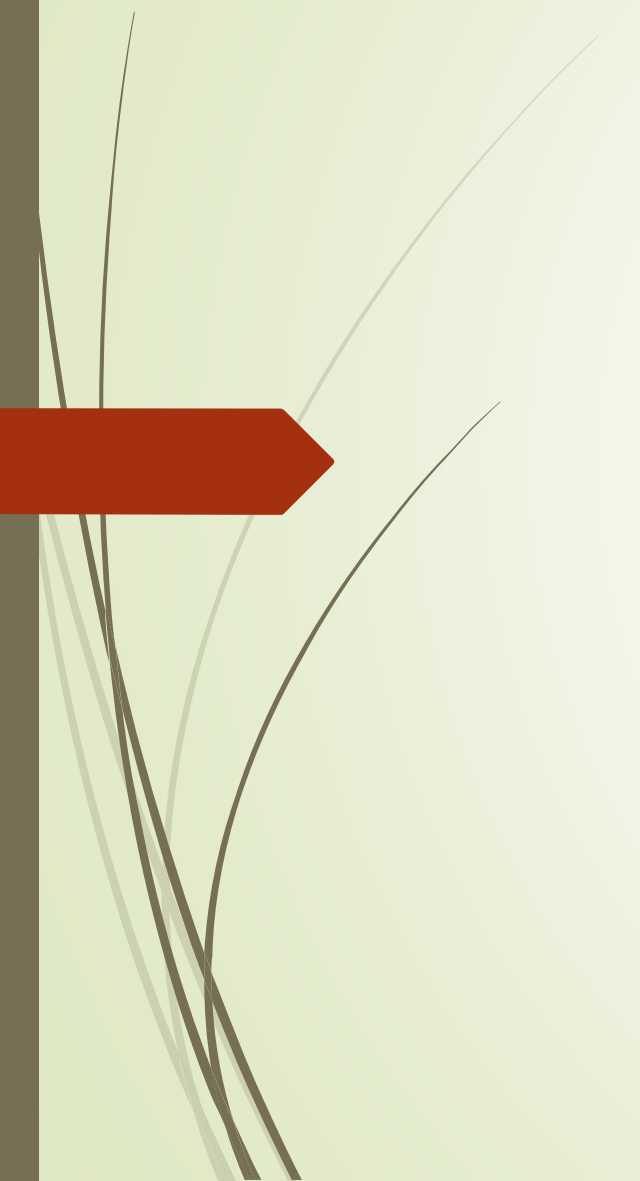
- 「数学は魔物で統計学は数字のトリック」と言う人
- 金科玉条のごとく無条件に信頼する人
- 灰塵の如く無視する人

統計的手法を使用する時の間違いのうち約 9 割が初歩的なものである

(間違い例)

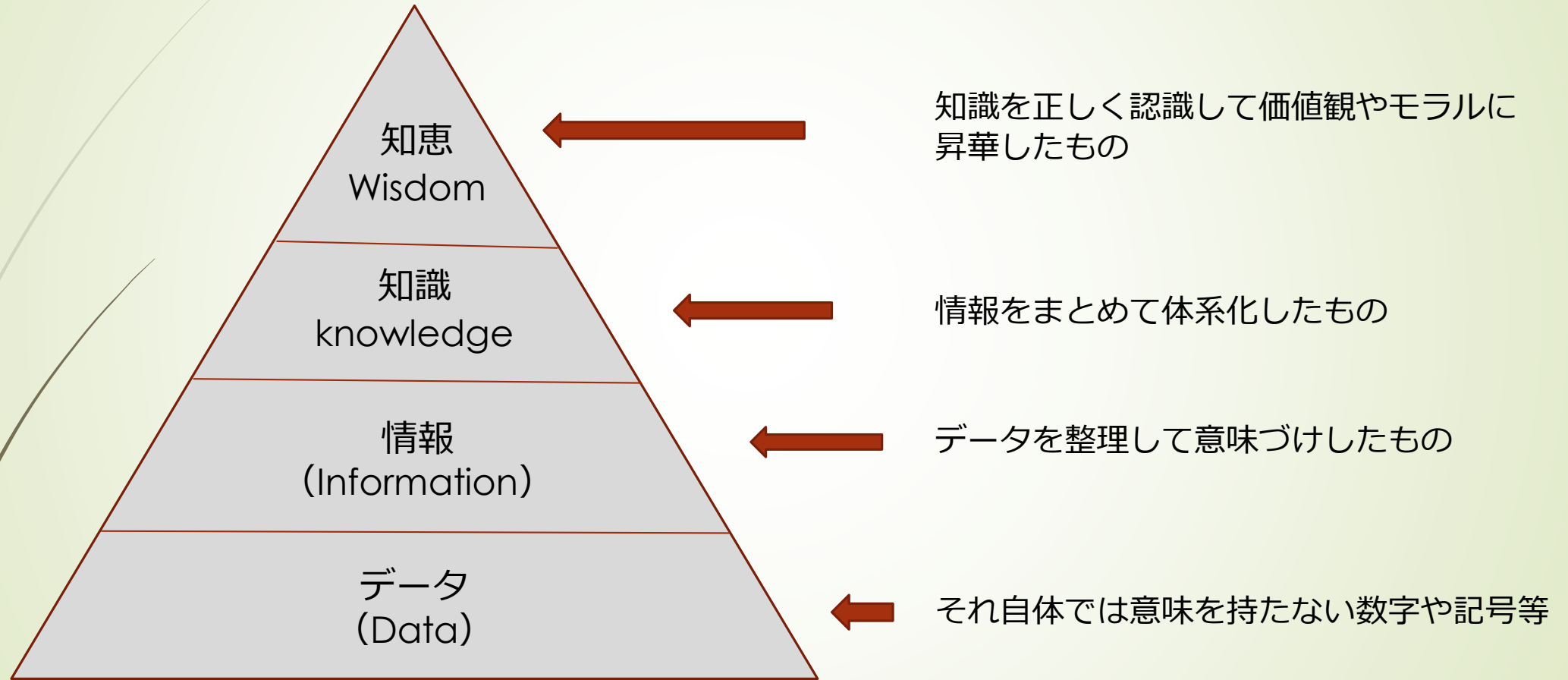
- 標準偏差 (S D) と標準誤差 (S E)
- 変動係数 (C V) の使い方
- 有意確率 (p 値) と「有意差あり」

- 
- 
- 統計学の基本概念について
 - 記述統計学について
 - 多変量解析について
 - 推測統計学について



統計学の基本概念

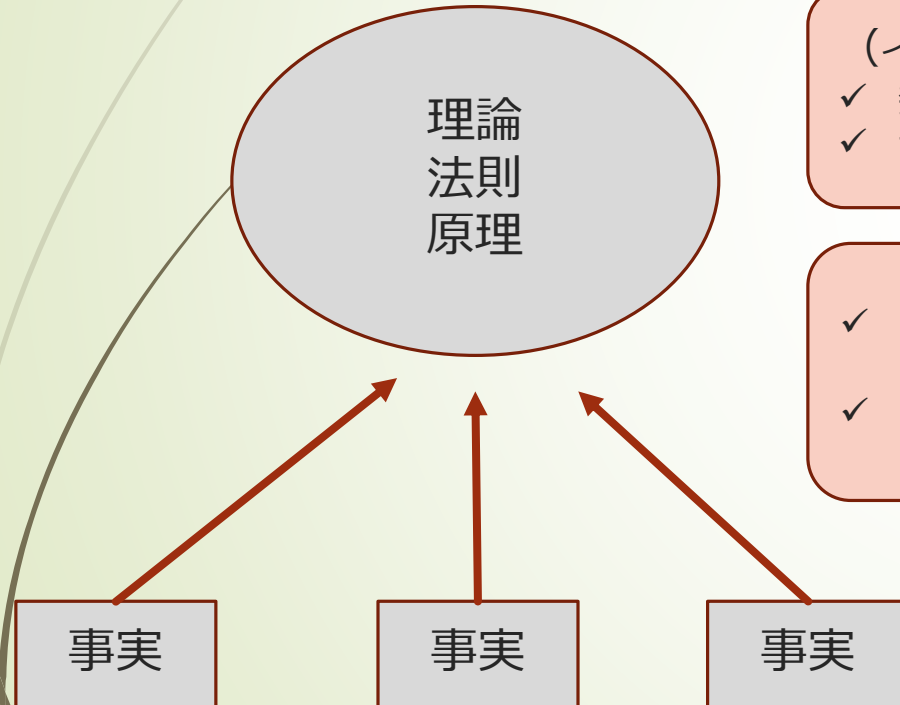
DIKWモデル



統計学はデータを情報に変換しやすくするための数学的な手段

近代科学と数学

自然の書物は数学の言語によって書かれている (近代科学の父 ガリレオ・ガリレイ)



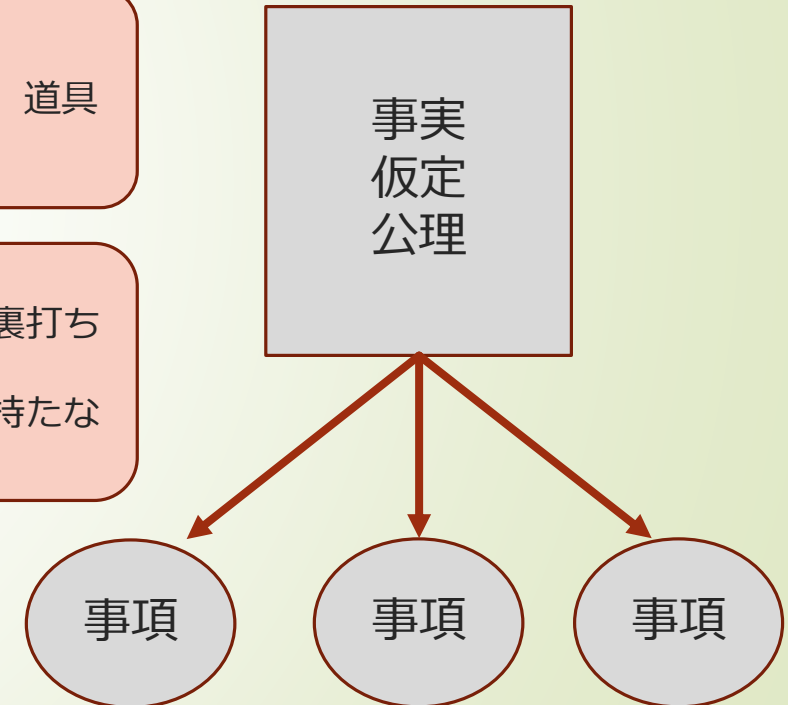
帰納法

(イメージ)

- ✓ 数学は科学のための特殊言語であり、道具
- ✓ 音楽で言えば楽譜

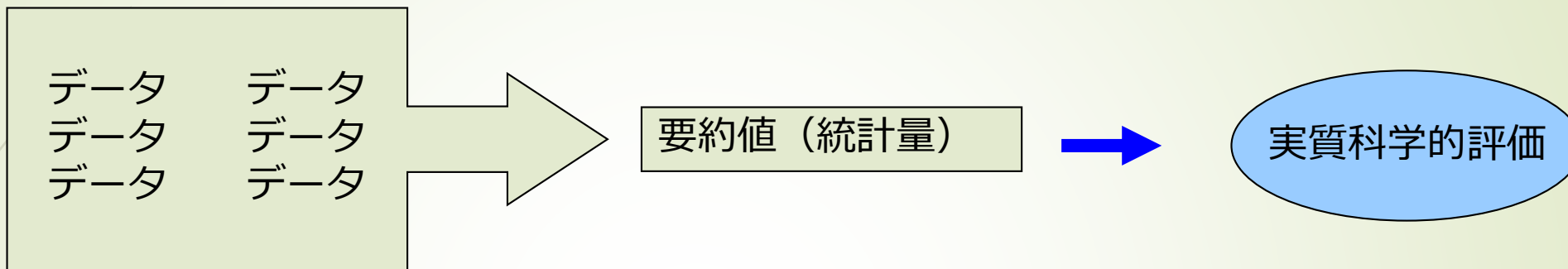
(研究)

- ✓ 目的をしっかり持ち、仮説や理論に裏打ちされた計画を立てることが必要
- ✓ 正しい実験計画のない研究は地図を持たない登山のようなもの！



演繹法

統計学とは何ぞや？



今、無作為抽出により選ばれた100人の体重の平均値が60kgになったとします

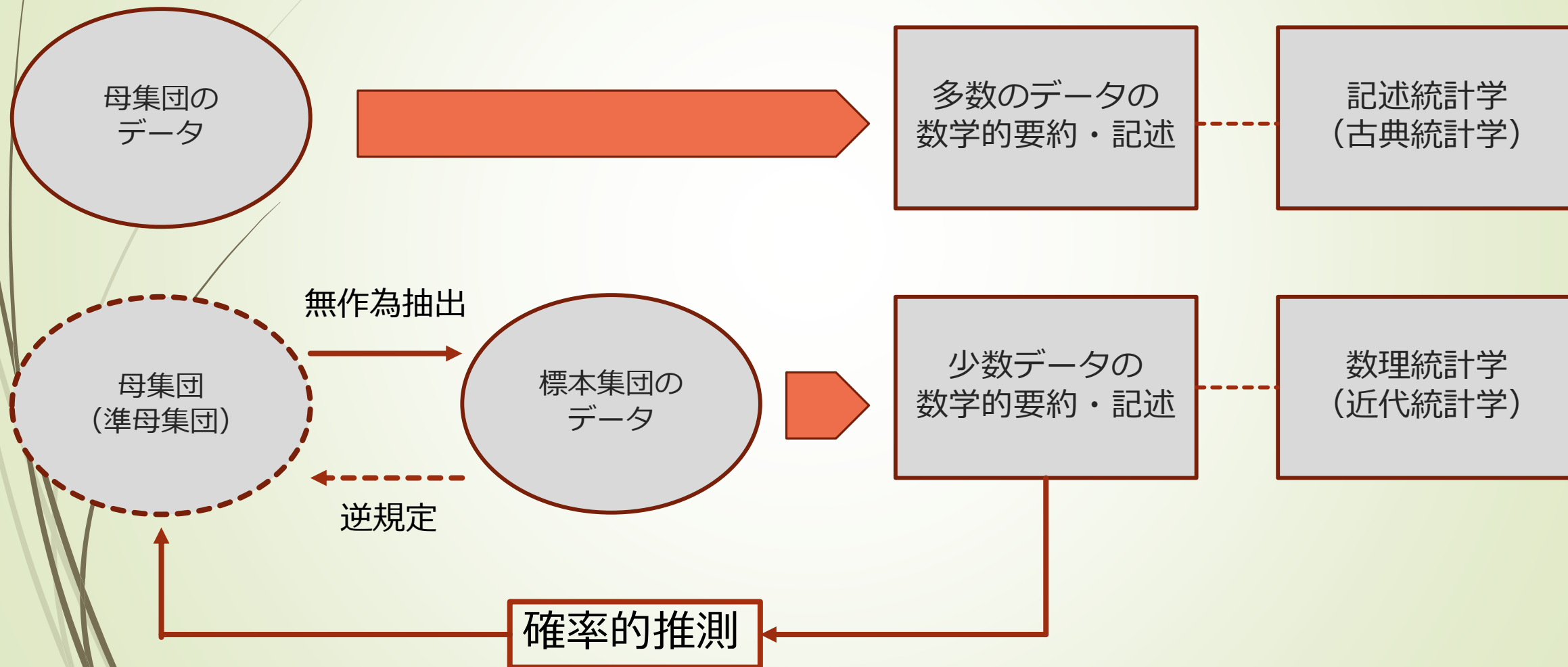
「100個のデータは概ね60kgぐらいの値である」 したがって
「100人の日本人の体重はだいたい60kgぐらいである」



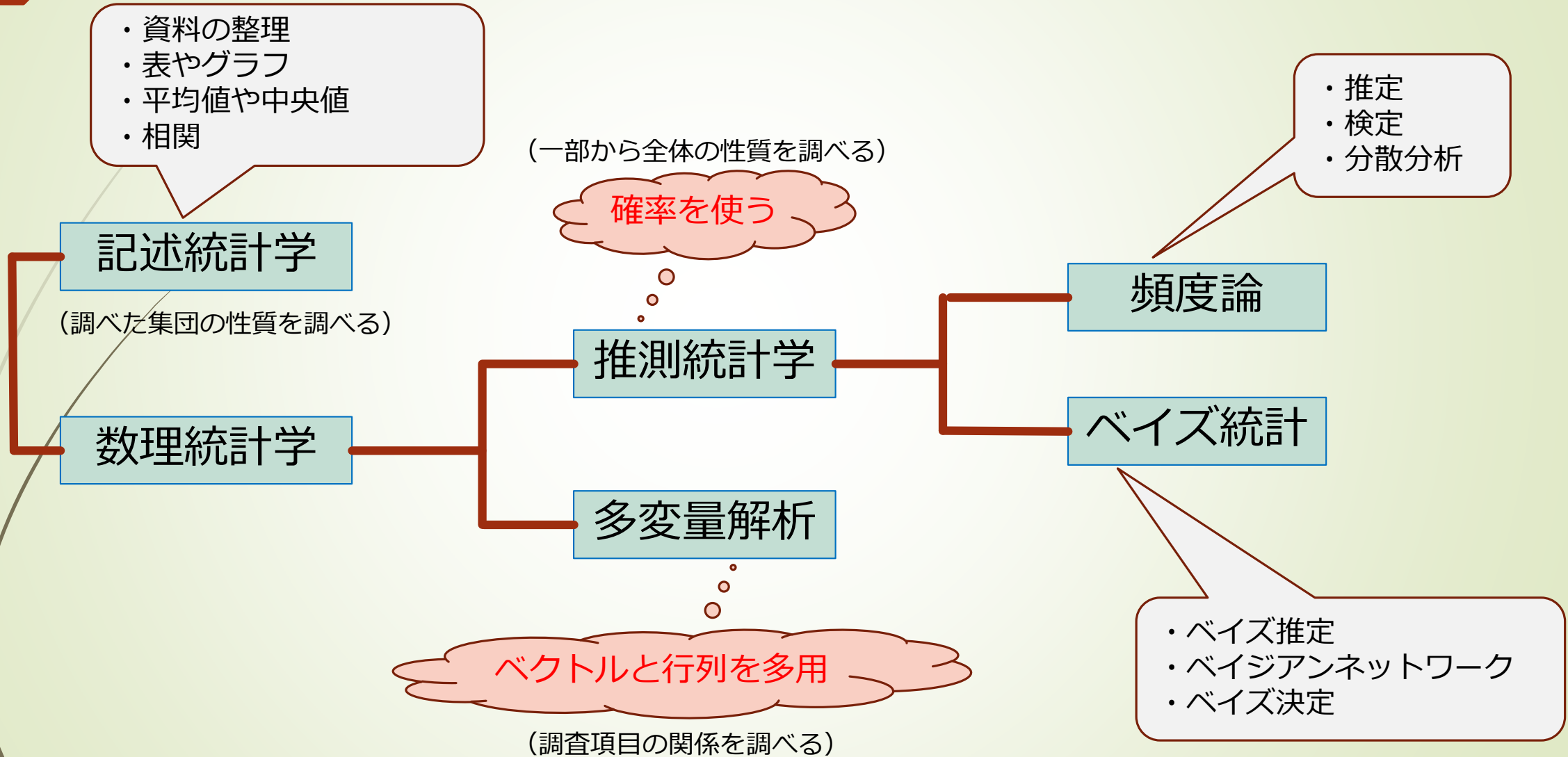
そこで、標準偏差が10kgになったとします。

「100個のデータはだいたい 60 ± 10 kgの値である」つまり、
「100人の日本人の体重はだいたい50～70kgである」

古典統計学と近代統計学

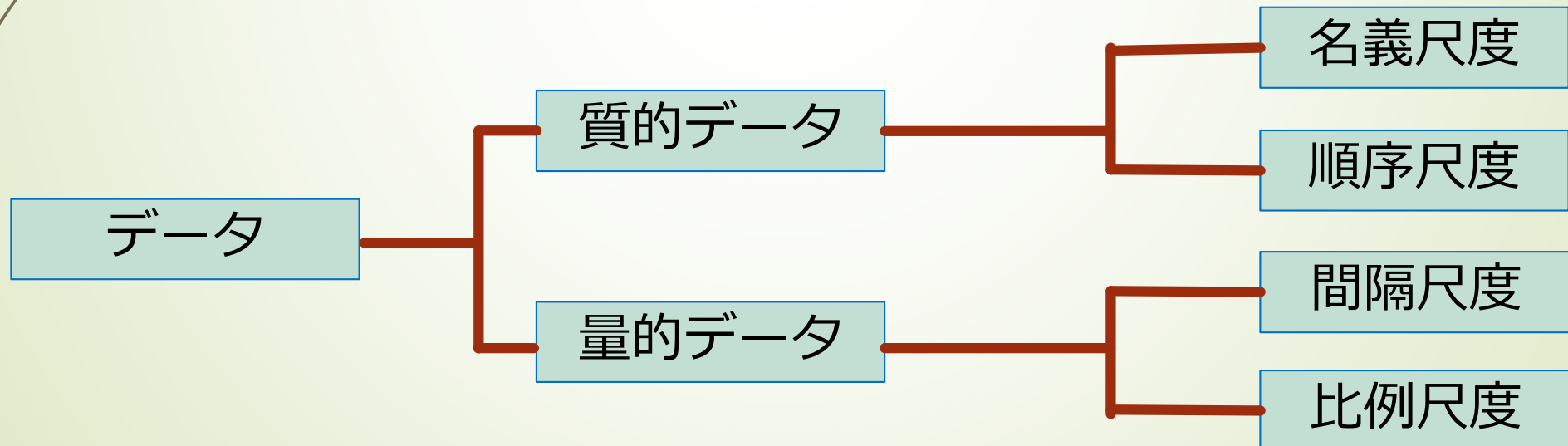


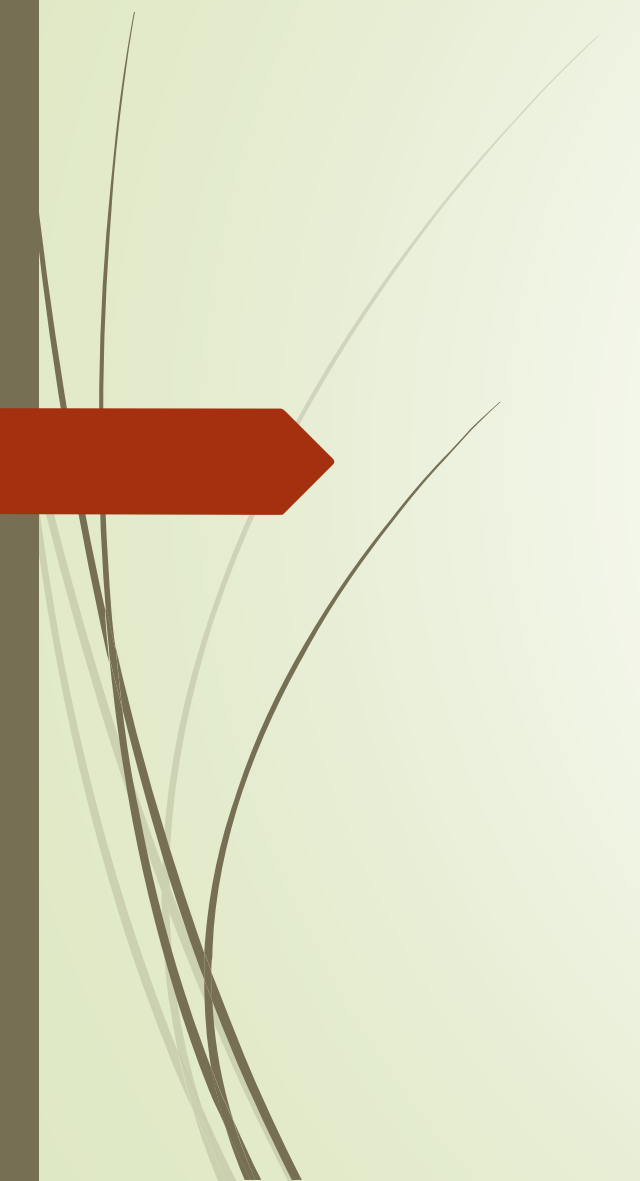
統計学の分類



統計学の分類

		意味	例
質的データ	名義尺度	名義的に数値化を施す尺度	男を1、女を2に数値化
	順序尺度	名義尺度に加え、順序にも意味がある尺度	「好き」を1、「普通」を2、「嫌い」を3に数値化
量的データ	間隔尺度	順序尺度に加え、数の間隔に意味がある尺度	気温、体温、時刻
	比例尺度	間隔尺度に加え、数値の比にも意味がある尺度	身長、体重、定量分析値



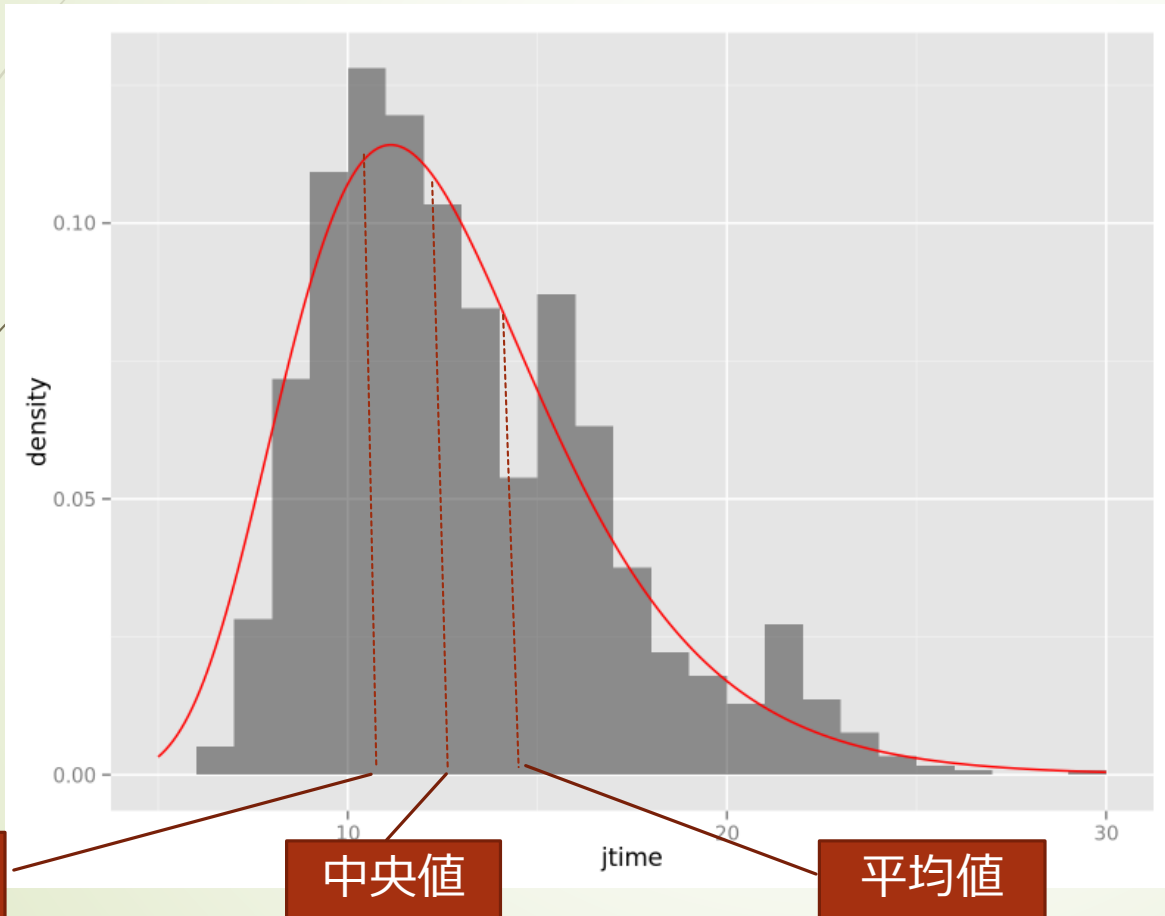


記述統計学

記述統計学

- 資料の表示（棒グラフ、折れ線グラフ、複合グラフ）
- 割合を示す表とグラフ（帯グラフ、円グラフ、複合グラフ）
- 関係を示す表とグラフ（散布図、**相関図**）
- 散らばりをあらわす表とグラフ
(**度数分布表**、**ヒストグラム**、**箱ひげ図**、**幹葉図**、**累積度数分布表**)
- 資料の平均値
- 資料の代表値（**中央値**、**最頻値**、**四分位数**）
- **分散と標準偏差**

資料の代表値

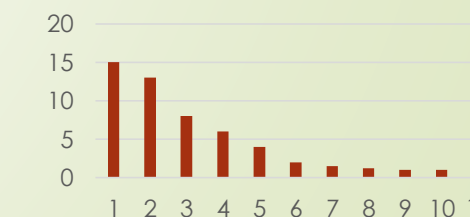
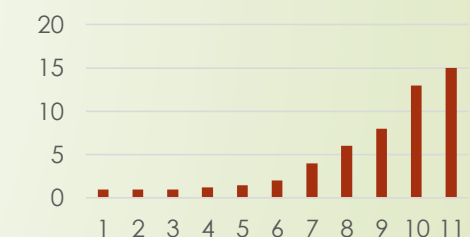
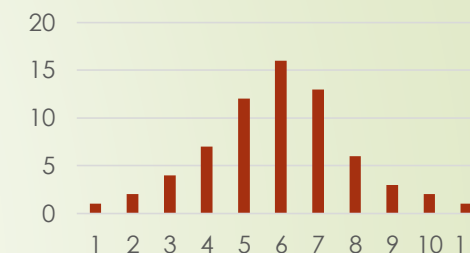
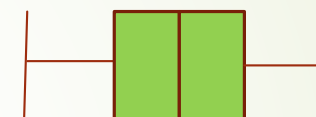
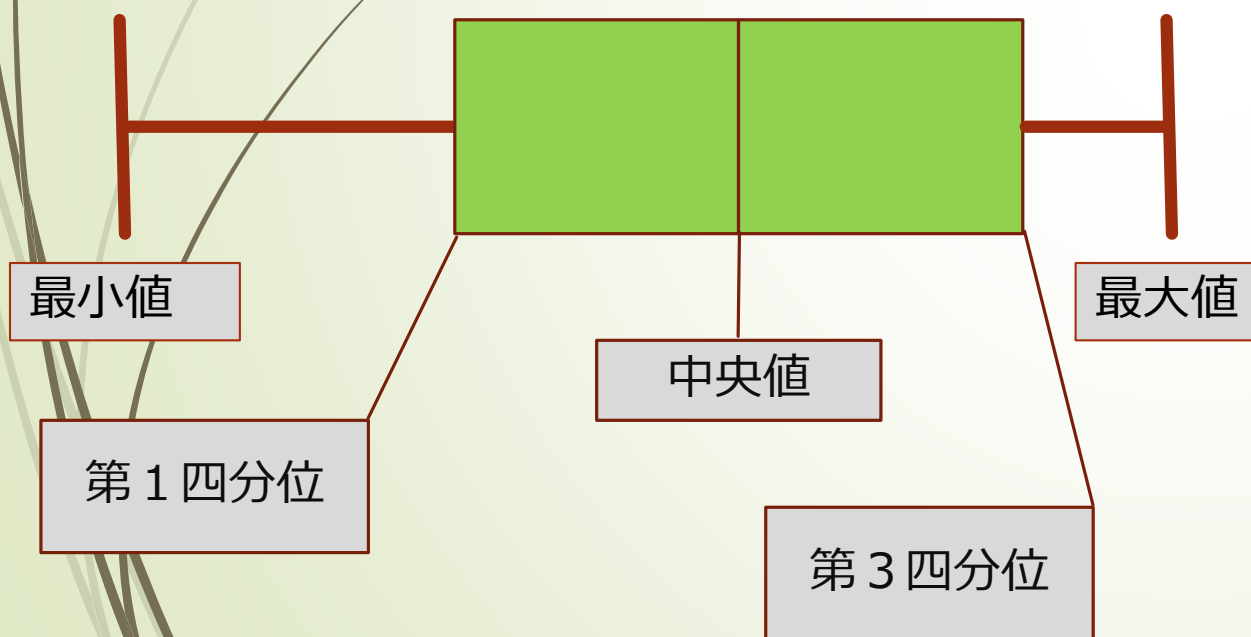


平均値は異常値の影響を受けやすい。



箱ひげ図と四分位数

「散らばり」のあるデータをブロックごとに
比較するのが便利なのが箱ひげ図



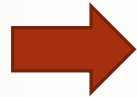
共用基準範囲の統計学的設定方法

(基準範囲)

基準個体より得た測定値の95パーセント信頼区間を統計学的な求めたもの

基準値

CLSIによる国際指針



問診（アンケート）を使用して、
ノンパラメトリック法（NP法）を用いて設定することが推奨

大数の法則



基準値の2.5パーセンタイルから97.5パーセンタイルを基準範囲とする

しかし、実際のデータでは偏りがあることが多く見られる（対数正規分布）

BOX-COX変換を使い正規分布に近づけてから、パラメトリック法で求めることが行なわれます。

パーセンタイルとは？

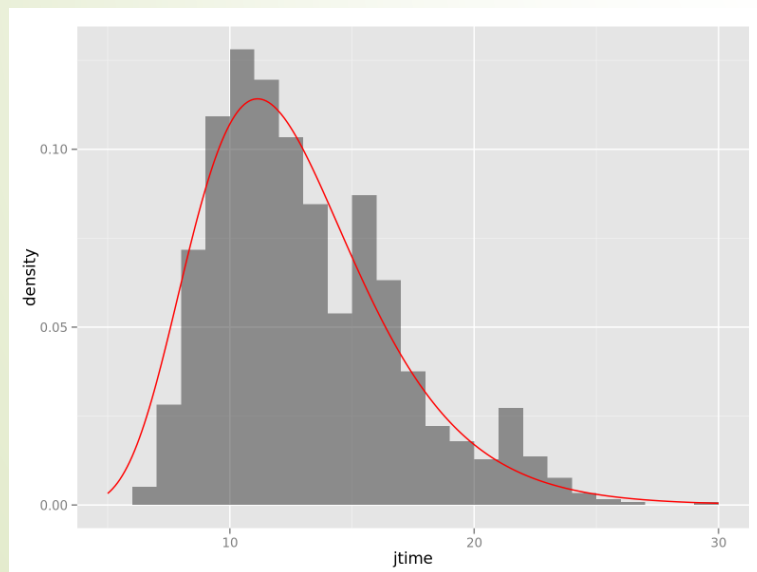
(パーセンタイル)

対象とする数値群を**小さい順に並べて**、指定された個数番目にある値

Pパーセンタイルの位置はデータの数をnとすると、 $(n+1)P/100$ となる

(パーセントとパーセンタイルの違い)

率 (percent、%) と下からの順位 (percentile)



(例)

- 50%は面積の1/2
- 50パーセンタイルは50番目の値
- 最頻値 (mode)
データ群や確率分布で最も頻繁に出現する値

例題

➤ 就職活動をしている国立 太郎 君は雇用条件の良い会社（社員数15名）を探しています。

A 社	社員の平均年収	650万円
	最高年収	3000万円

B 社	社員の平均年収	605万円
	最高年収	1100万円

A 社 > B 社

第二四分位（50パーセンタイル）

A 社	340万円
-----	-------

B 社	570万円
-----	-------

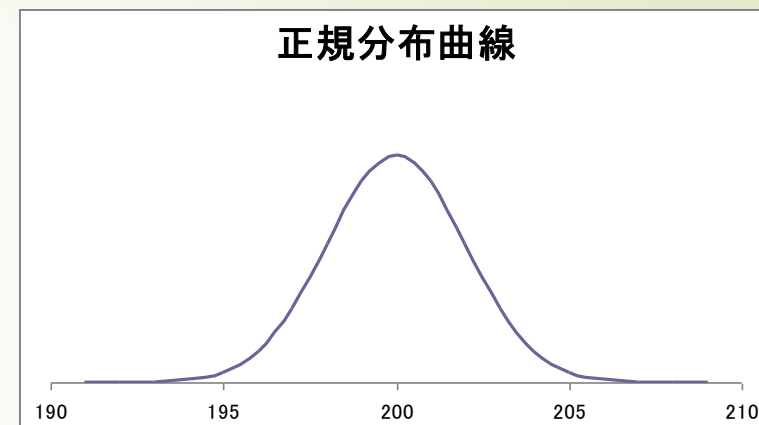
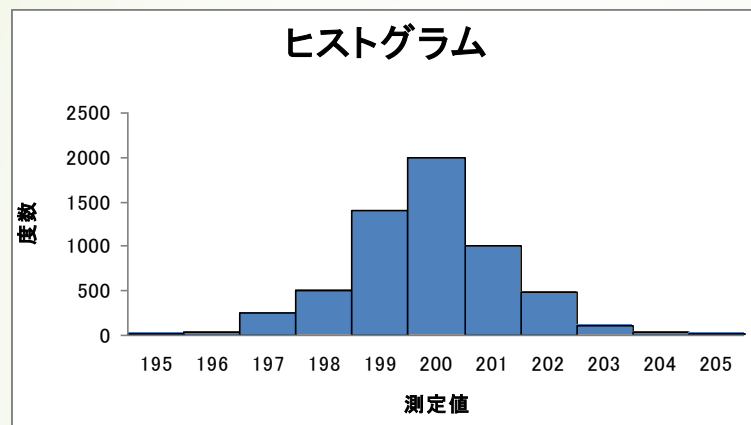
A 社 < B 社

社員の年収



度数分布図

度数分布表



“百聞は一見にしかず”

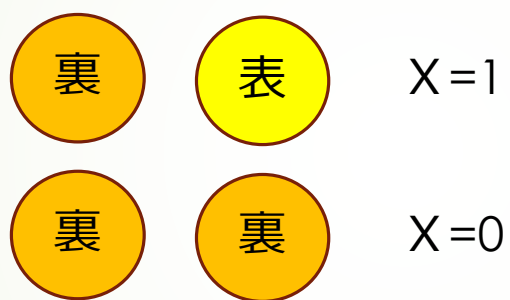
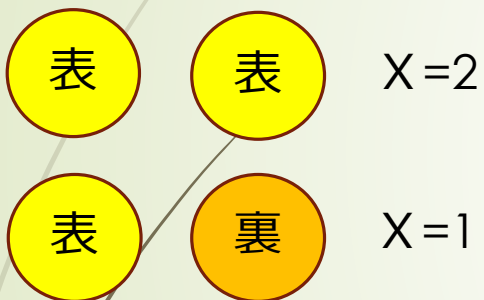


最頻値、中央値、平均値、分散、四分位数、レンジ等から分布型を推測することが大切！

離散型確率変数

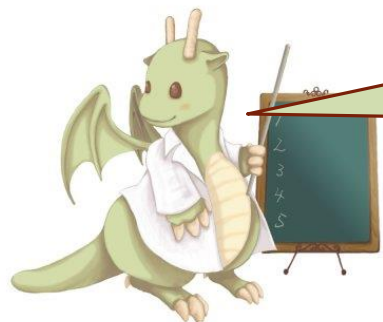
表裏が等確率で現れるコイン2枚を同時に投げる時、表が出る確率分布を考える

試行



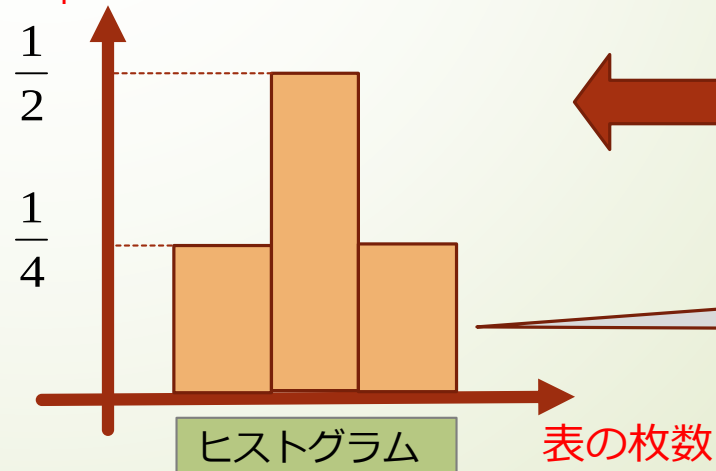
確率分布表

表の枚数 X	確率 p
2	$1/4$
1	$1/2$
0	$1/4$



ヒストグラムの作り方は、
このようなステップになり
ます。

確率 p



総面積は1になる

ヒストグラム

表の枚数

確率変数の期待値と分散（離散型確率変数）

確率変数 X の確率分布が表であたえられているとき、期待値と分散、標準偏差は下記のように定義される。

「確率分布表」

確率変数 X	確率
x_1	p_1
x_2	p_2
・	・
・	・
x_n	p_n
計	1

(期待値)

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

(分散)

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n$$

(標準偏差)

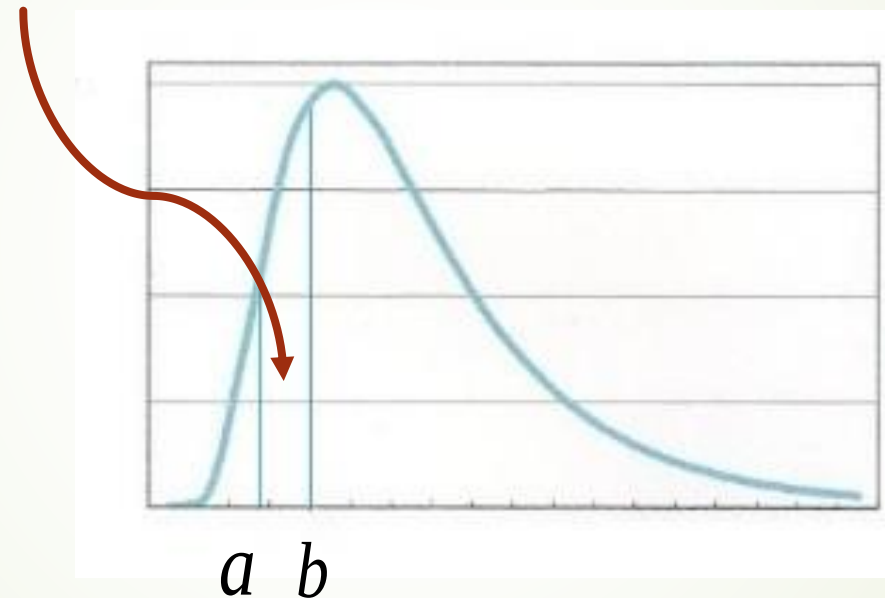
$$\sigma = \text{分散の正の平方根} \sqrt{\sigma^2}$$

連続型確率変数と確率密度関数

「確率分布表」

階級		確率
以上	未満	
150	155	0.00
155	160	0.05
160	165	0.20
165	170	0.25
170	175	0.30
175	180	0.15
180	185	0.05
185	190	0.00
総和		1

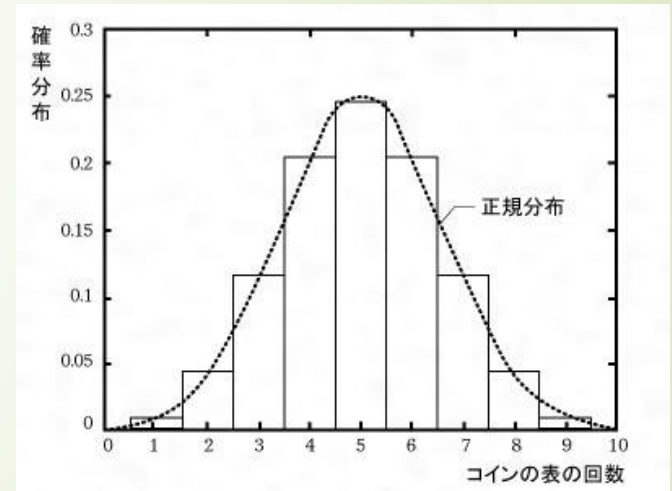
確率変数 X が $a \leq x \leq b$ の値
をとる確率がこの面積



連続型確率変数の場合、確率分布表では正確な分布を表現できません



確率密度関数を使用する



期待値 μ = 「確率変数 X と確率密度関数の積」の積分

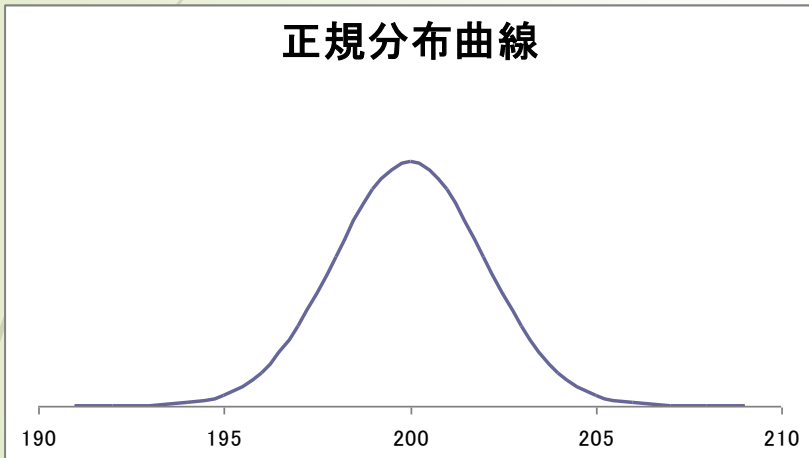
分散 σ^2 = 「 $(X \text{ の値} - \text{期待値})^2 \times \text{確率密度関数の積}$ 」の積分

正規分布

「確率密度関数」を持つ確率分布を正規分布という

期待値 $\mu = 0$
標準偏差 $= 1$

正規分布曲線



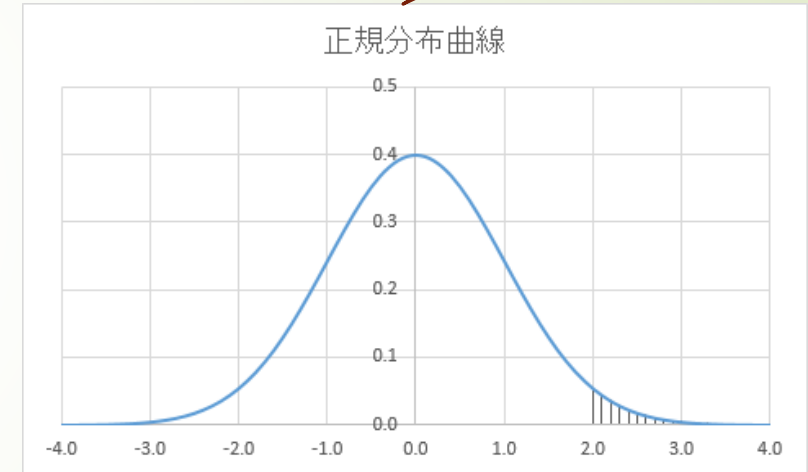
標準化 (Z変換)

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



期待値 : μ
標準偏差 : σ

正規分布曲線



$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

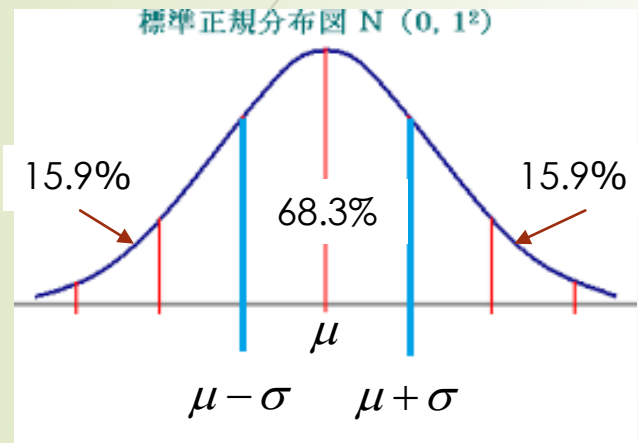
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$N(0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

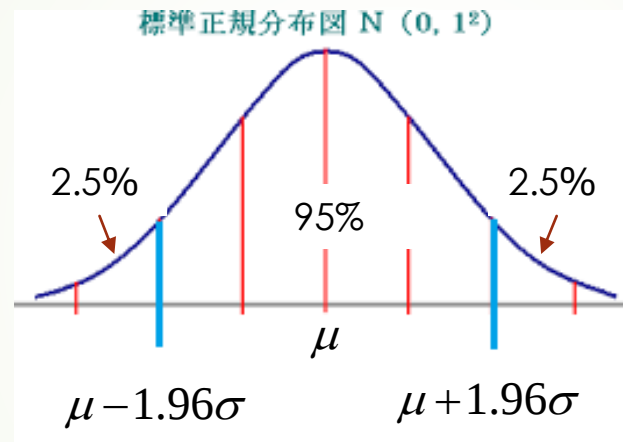
正規分布の性質



μ : 期待値

σ : 標準偏差

両側 5 %

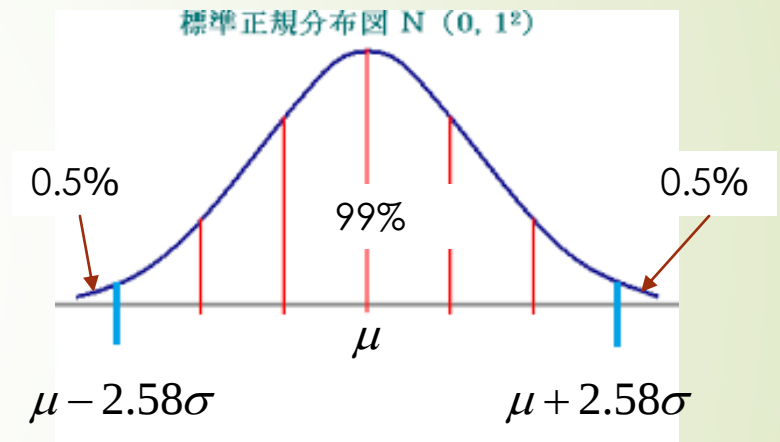


上側 5 %



$\mu + 1.64\sigma$

両側 1 %



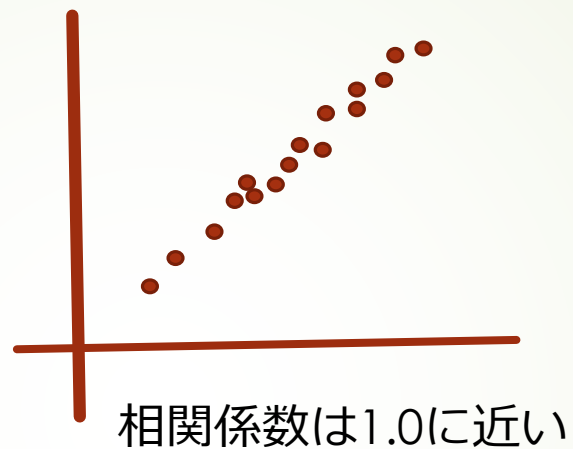
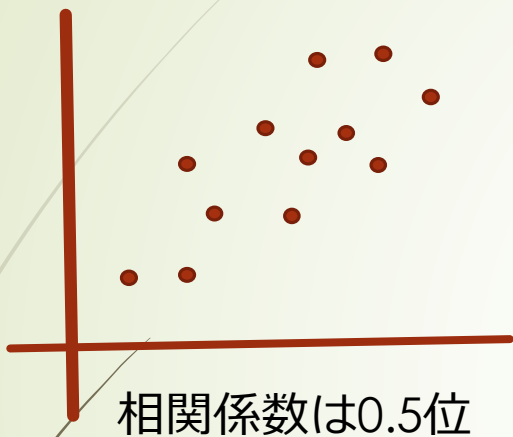
上側 1 %



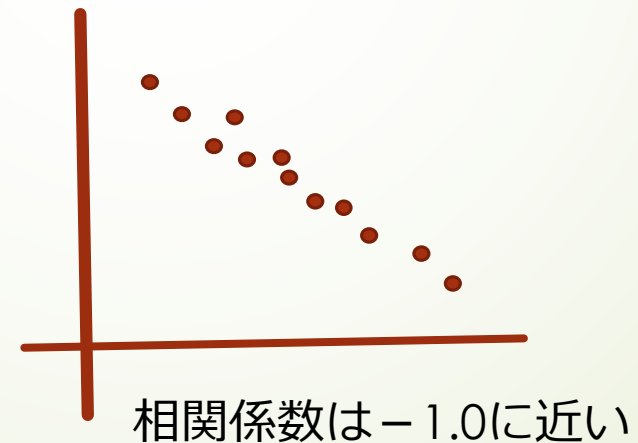
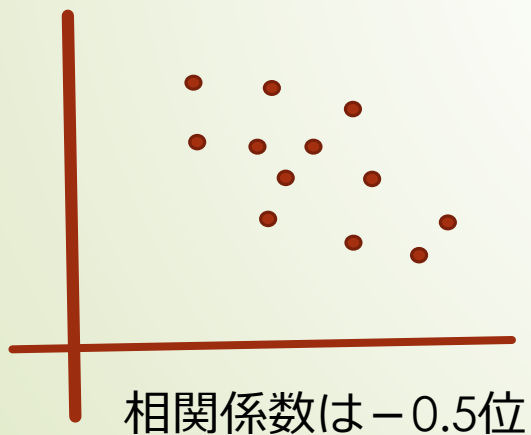
$\mu + 2.33\sigma$

相関性

正の相関



負の相関



弱い

強い

- 相関性を数値化したのが共分散
- 相関係数は-1.0から1.0の値



共分散と相関係数

共分散

$$S_{xy} = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{n}$$

相関性を数値化

相関の強弱を測れる指標

相関係数

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$S_x = X$ の標準偏差

$S_y = y$ の標準偏差

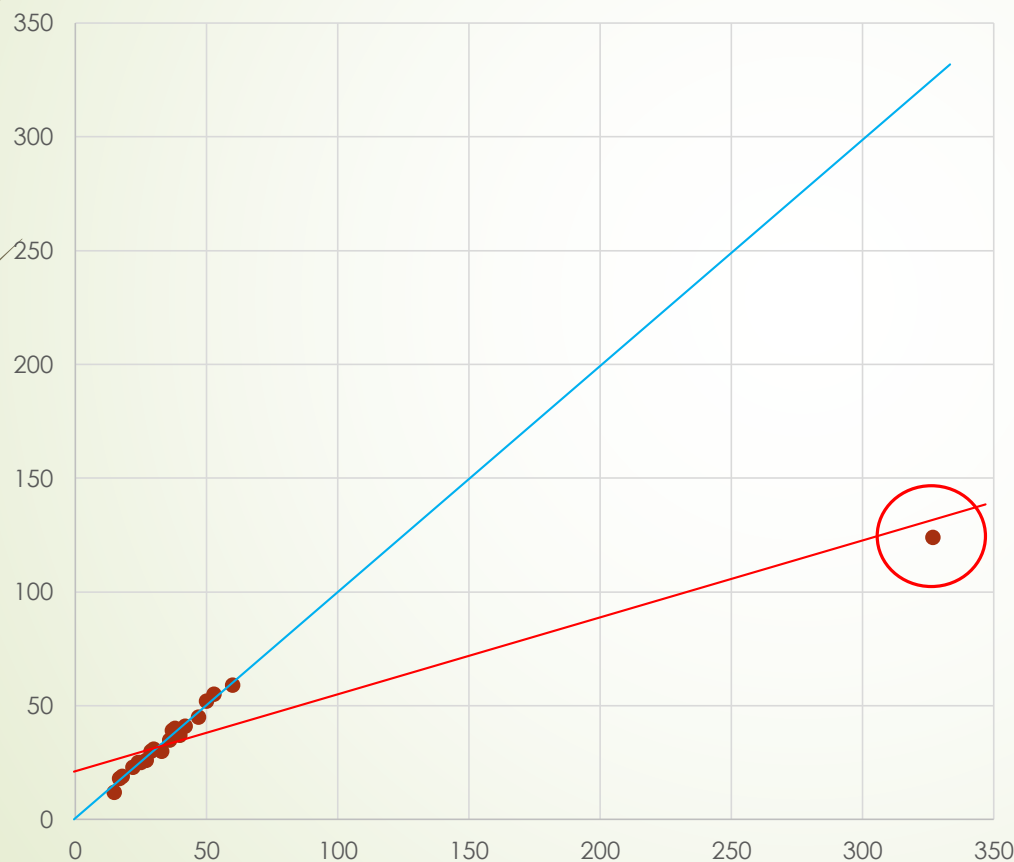
スピアマンの順位相関係数

$$\rho = 1 - \frac{6\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\}}{n(n^2 - 1)}$$

アンケート分析などで利用される順序尺度のデータ分析には欠かせない相関係数です。

相関係数と回帰直線（線形関係式）

数理統計学（多変量解析）



回帰方程式 $y = ax + b$

説明変数 x (切片)
目的変数 y (回帰係数 a)

$$r_{xy} = 0.990$$

$$y = 1.002x + 0.775$$



$$r_{xy} = 0.931$$

$$y = 0.332x + 22.215$$

外れ値の対応（グラブス・スミルノフ棄却検定）

1. 仮説を立てる

帰無仮説 H_0 : 他のデータとかけ離れた値は異常値ではない。

対立仮説 H_1 : 他のデータとかけ離れた値は異常値である。

2. 有意水準 α を決め、スミルノフ棄却検定表よりデータ数 n のときの値 k を得る。

* $\alpha=0.05$ または $\alpha=0.01$ を優位水準とする。

3. 検定統計量 T を求める。

$$\text{検定統計量 } T = \frac{(\text{異常値}) - (\text{標本平均})}{\sqrt{\text{標本分散}}}$$

$$T = \frac{x_n - \bar{x}}{\sqrt{s_x}}$$

⇒ $T > k$ で帰無仮説を棄却し、対立仮説を採用。つまり、有意水準 α で、かけ離れた値は異常値とみなして棄却される。

外れ値の対応（トンブソン棄却検定）

1. 仮説を立てる

帰無仮説 H_0 : x_n は同じ母集団からの標本である。

対立仮説 H_1 : x_n は別の母集団からの標本である。

2. 検定統計量Tを求める。

$$T(x_n) = \frac{\sqrt{n-2} \cdot \tau_0}{\sqrt{n-1 - \tau_0^2}} \quad \text{ただし、} \tau_0 = \frac{x_n - \bar{x}}{s_x}$$

3. 自由度n-2のt分布に従うので、有意水準 α を決めて表より値 k を得る。

* $\alpha=0.05$ または $\alpha=0.01$ を優位水準とする。

⇒ $T > k$ で帰無仮説を棄却し、対立仮説を採用。つまり有意水準 α で、かけ離れた値は異常値とみなして棄却される。

外れ値の対応

棄却検定の特徴

- ✓ スミルノフ棄却検定は、棄てるであろうと思われる時
- ✓ トンプソン棄却検定は、棄てられないであろうと思うデータを保留する時
- ✓ 増山の棄却検定は過去の測定値を基準にして異常であるか否かを検討する時

棄却検定はいずれの方法も、外れ値かどうかチェックするためのもので、データを棄てる場合は、その原因を発見する必要がある。

[原因不明の外れ値についての対処方法]

- 1.外れ値を含めて解析した時の結果と、外れ値を除外して解析した時の結果を比較検討する。
- 2.外れ値を含めて解析する。
- 3.データに順位を付け、順位を用いて解析する。
(ウィルコクソンが順位和検定を開発したのは、外れ値の処理に困ったため)

データの平均と分散

母集団から無作為抽出を行なった時. . .

母平均 (μ) $\doteq$ 標本平均 ($\bar{X}$)

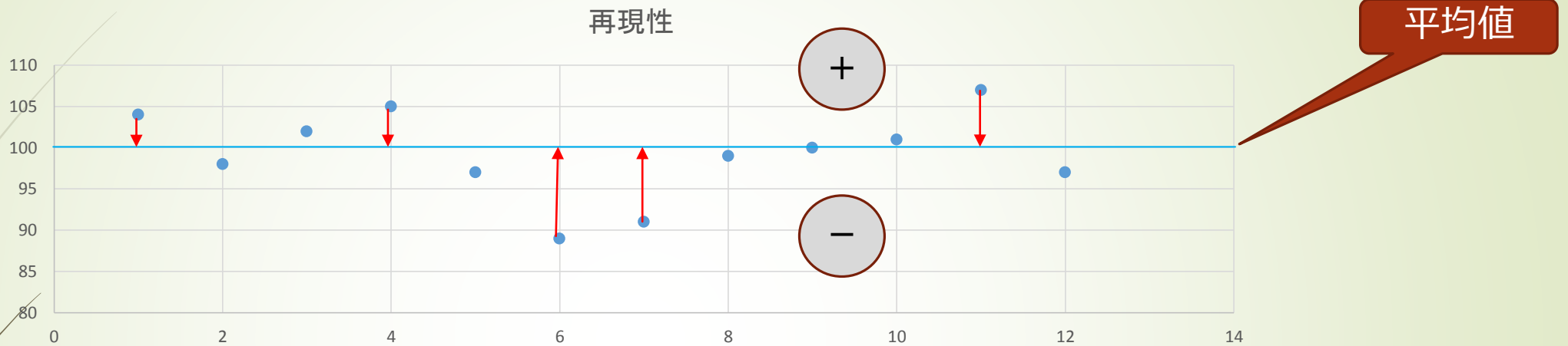
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 \cdots X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{\sum X}{n}$$

母分散 (σ^2) $\doteq$ 分散 (variance) V

$$V = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n} \quad \longrightarrow \quad V = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

普遍分散

分散（バラツキ）



平均値に対してバラツキの合計は0となる

そこで...

$$V = \frac{\sum (Xi - \bar{x})^2}{n}$$



$$V = \frac{\sum (Xi - \bar{x})^2}{n-1}$$

普遍分散

普遍分散

(n-1の理由)

100人のデータの平均が60であるとき、平均値を固定すると99個は勝手に変動出来ますが、最後の1個は平均値を60にするため勝手に変動出来ず固定されます。

自由に変動できるデータ

独立変数

独立変数によって決められるデータ

従属変数

独立変数の個数

自由度

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

普遍標準偏差

標準誤差

標準誤差SE (standard error)

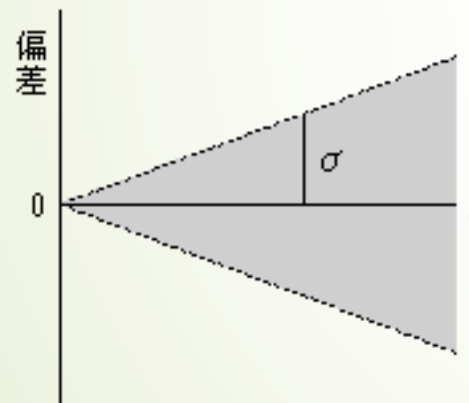
標準誤差は「標本平均のばらつき」であり、標本平均で母平均を推測する時の誤差の大きさを表す指標になります。

1. 母集団がどんな分布をしていても、標本平均の分布は正規分布に近似する。これを「**中心極限定理(central limit theorem)**」という。
2. 標本平均の平均値 m は母平均 μ と一致する。
3. 標本平均の標準偏差 S_m は、標本集団の例数を n 、母標準偏差を σ とすると次のようになる。

$$S_m = SDm = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

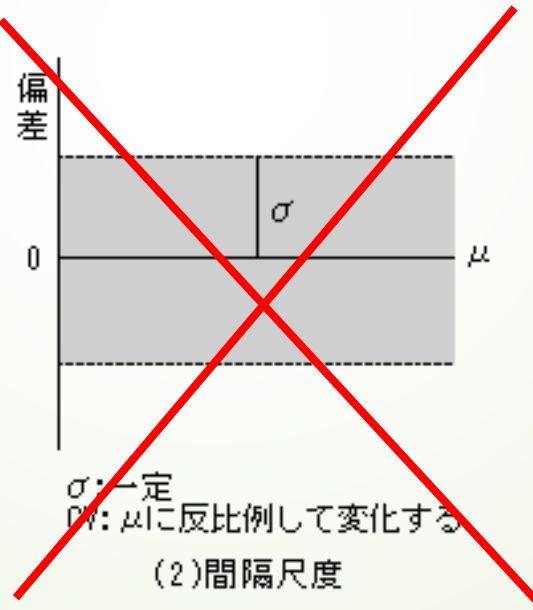
変動係数

変動係数が本質的に意味を持つのは、標準偏差が平均値に比例するようなデータすなわち比例尺度のデータだけです。



σ : μ に正比例して変化する
CV: 一定

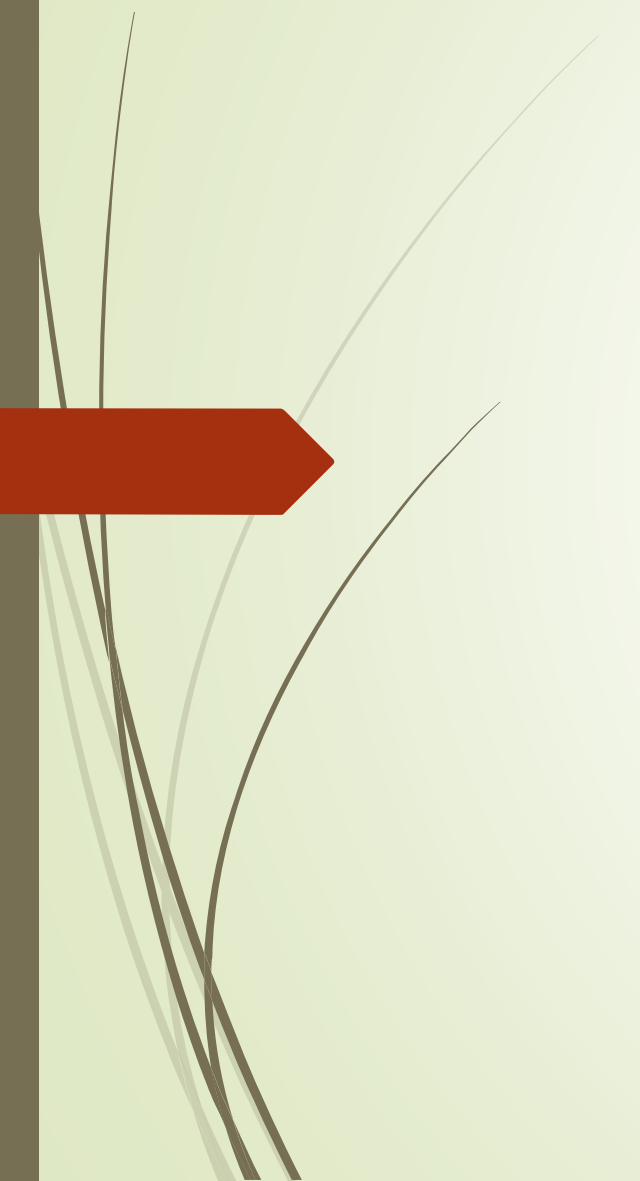
(1) 比例尺度



σ : 一定
CV: μ に反比例して変化する

(2) 間隔尺度

$$CV = \frac{SD}{\bar{x}} \times 100$$



多变量解析

母集団と標本

医学の場合は

患者はある意志を持って集まったものであるため、
実際の臨床では無作為標本を集める事が困難である。

無作為抽出

学的推測

(観察調査)

患者一人一人を観察しながら得られた標本からさかの
ぼって母集団を規定する。

(性、年齢、既往歴、理学的所見等．．． etc)

回帰分析の考え方

回帰係数 $a = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$

切片 $b = \bar{y} - a\bar{x}$



回帰方程式 $y = ax + b$

説明変量 (points to x)

切片 (points to b)

目的変量 (points to y)

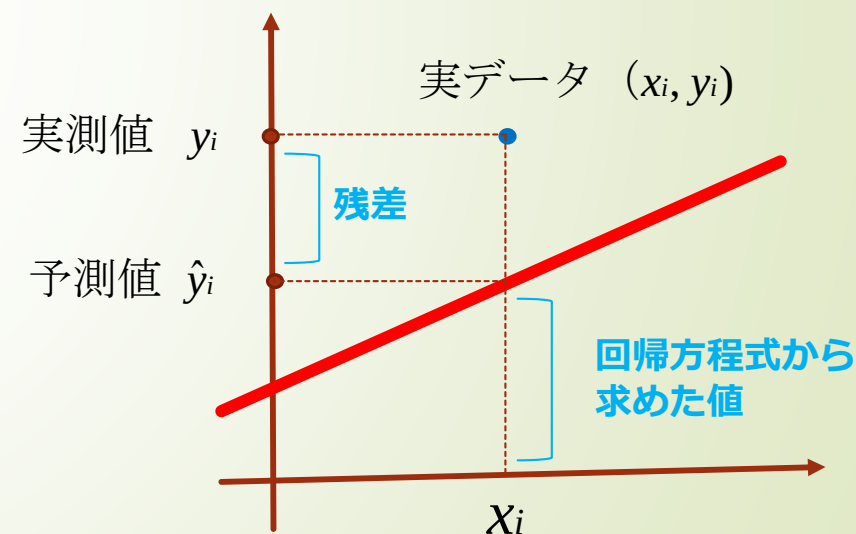
回帰係数 (points to a)

残差平方和 $Q_e = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \hat{y}_n)^2 \dots$

- 残差平方和を最小にするように理論式のパラメータを決定する方法が最小2乗法である。
- 残差平方和を最小にする回帰方程式を求めるには微分を利用する。
- x と y 共に誤差を含む場合は線形関係式を使用する。

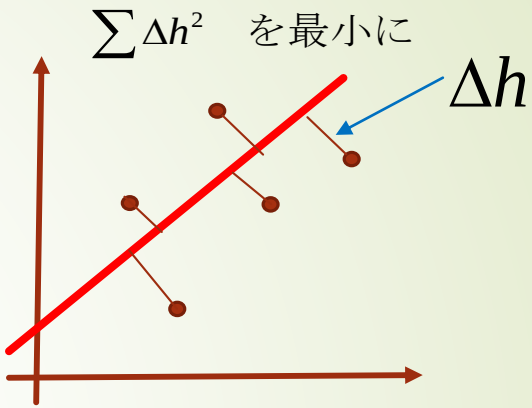
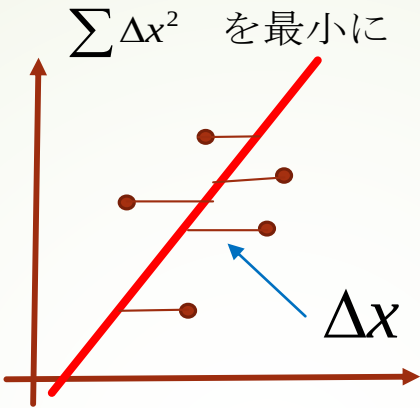
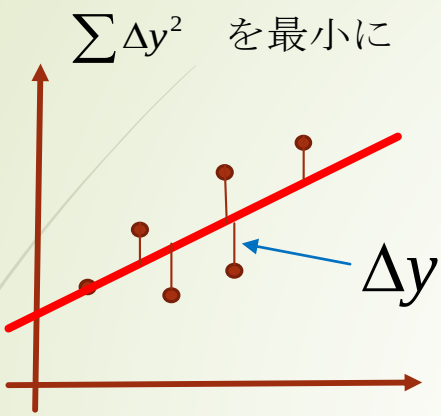
(注意)

- ✓ 回帰直線は曲線的な相関には用いるべきではない。
 - ✓ 多項式の次数が極端に高くなるような高次関数はランゲ現象に注意する。
- ↓
- ✓ スプライン関数を使用する (最適化に注意)。



$\hat{y}$: y カレット

回帰直線の比較



	方法	目的	計算基準	傾き a	Y切片 b
1	x→y の回帰	関係・予測	$s_{yx}[\sum \Delta y^2]$ を最小に	$\frac{s_{xy}}{s_{xx}}$	$\bar{y} - b\bar{x}$
2	y→x の回帰	関係・予測	$s_{xy}[\sum \Delta x^2]$ を最小に	$\frac{s_{xx}}{s_{xy}}$	$\bar{y} - b\bar{x}$
3	標準主軸回帰	関係	$[\sum \Delta x \cdot \Delta y]$ を最小に	$\sqrt{\frac{s_{yy}}{s_{xx}}}$	$\bar{y} - b\bar{x}$
4	主成分回帰	関係	$s[\sum \Delta h^2]$ を最小に	$\frac{s_{yy} - s_{xx} + \sqrt{(s_{yy} - s_{xx})^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}$	$\bar{y} - b\bar{x}$
5	Deming回帰	関係	sd を最小に	$\frac{s_{yy} - \lambda s_{xx} + \sqrt{(s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2}}{2s_{xy}}$	$\bar{y} - b\bar{x}$

重回帰分析

重回帰分析は「3変量以上」について、1変量を「他の変量の式」で表現する分析法

右の資料は10名の大学生についてウェスト w 、身長 x 、体重 y を調べたものです。目的変量にした回帰方程式を導きましょう。

3変量 w 、 x 、 y からなる資料において、 y を「目的変量とする回帰方程式」は

$$\hat{y} = a + bw + cx \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

この切片 a 、偏回帰係数 b, c は次の式を満たす。

$$\begin{cases} sw^2b + swxc = swy \\ swxb + sx^2c = sxy \\ \bar{y} = a + b\bar{w} + c\bar{x} \end{cases}$$

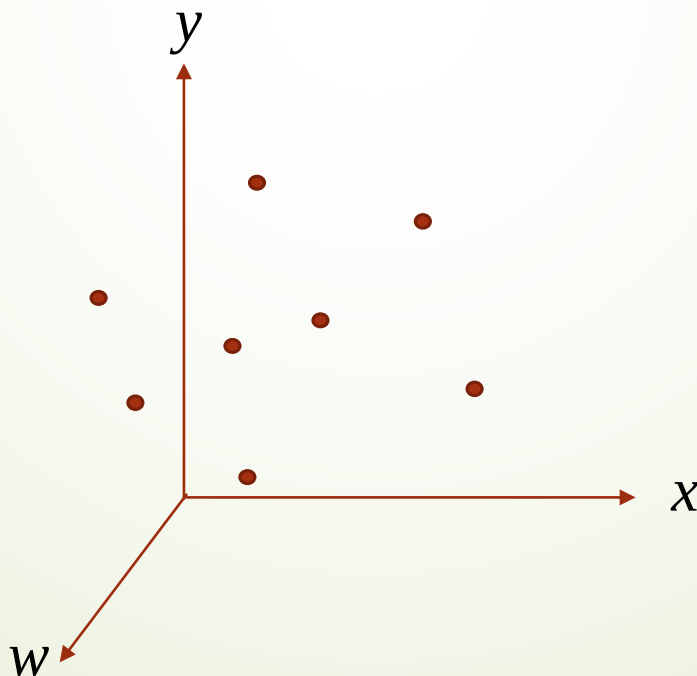
No	ウエスト w	身長 x	体重 y
1	67	160	50
2	68	165	60
3	70	167	65
4	65	170	65
5	80	165	70
6	85	167	75
7	78	178	80
8	79	182	85
9	95	175	90
10	89	172	81

重回帰分析

$$(\hat{y} = a + bw + cx)$$

$$\hat{y} = -166.3 + 0.71w + 1.08x$$

偏回帰係数



No	ウエスト w	身長 x	体重 y
1	67	160	50
2	68	165	60
3	70	167	65
4	65	170	65
5	80	165	70
6	85	167	75
7	78	178	80
8	79	182	85
9	95	175	90
10	89	172	81

非線形回帰について

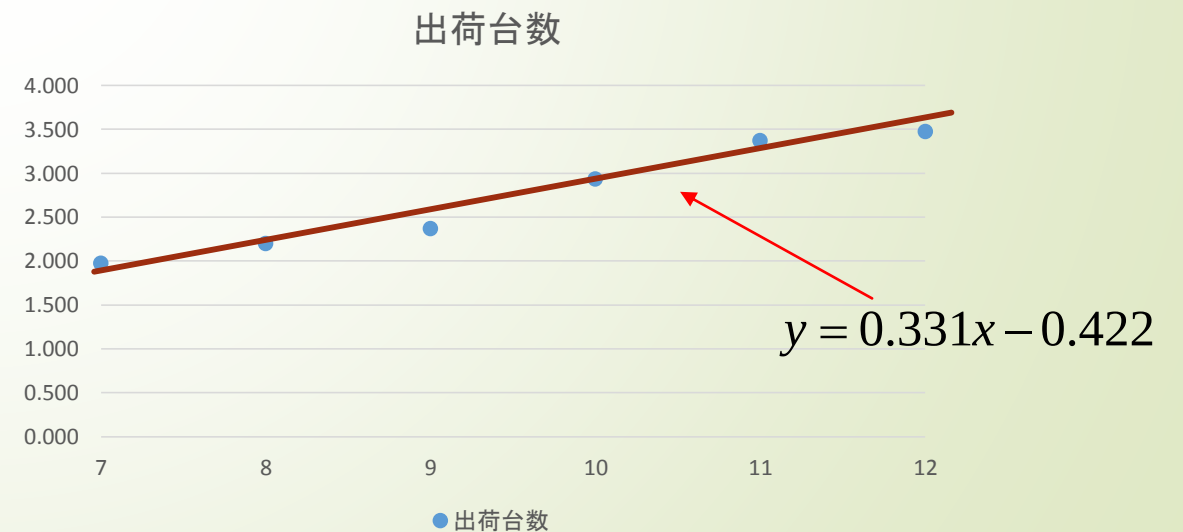
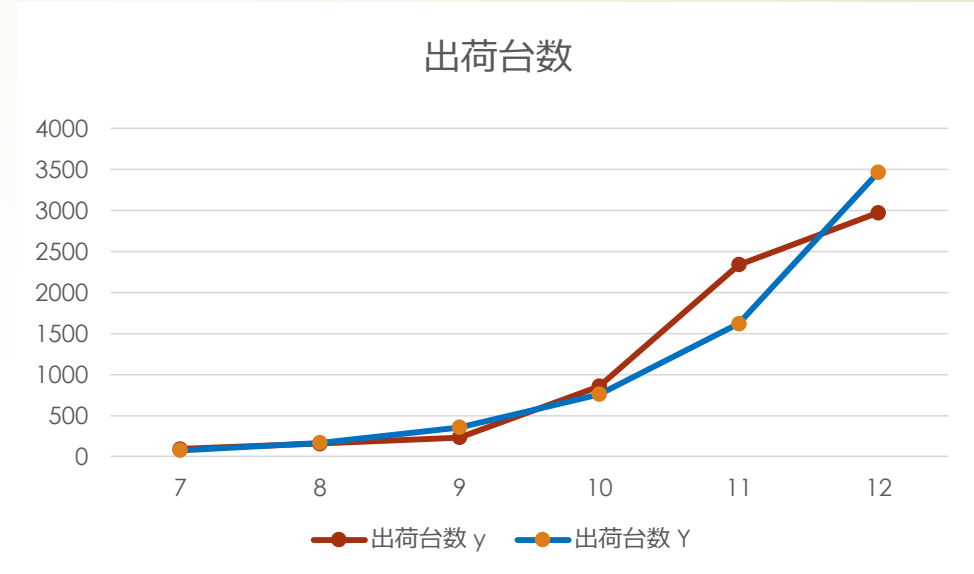
2007年から2012年までのスマートフォンの出荷台数

年度	x	出荷台数 y
	7	94
	8	158
	9	234
	10	855
	11	2340
	12	2972

出荷台数の対数をとる

$$Y = \log_{10} y$$

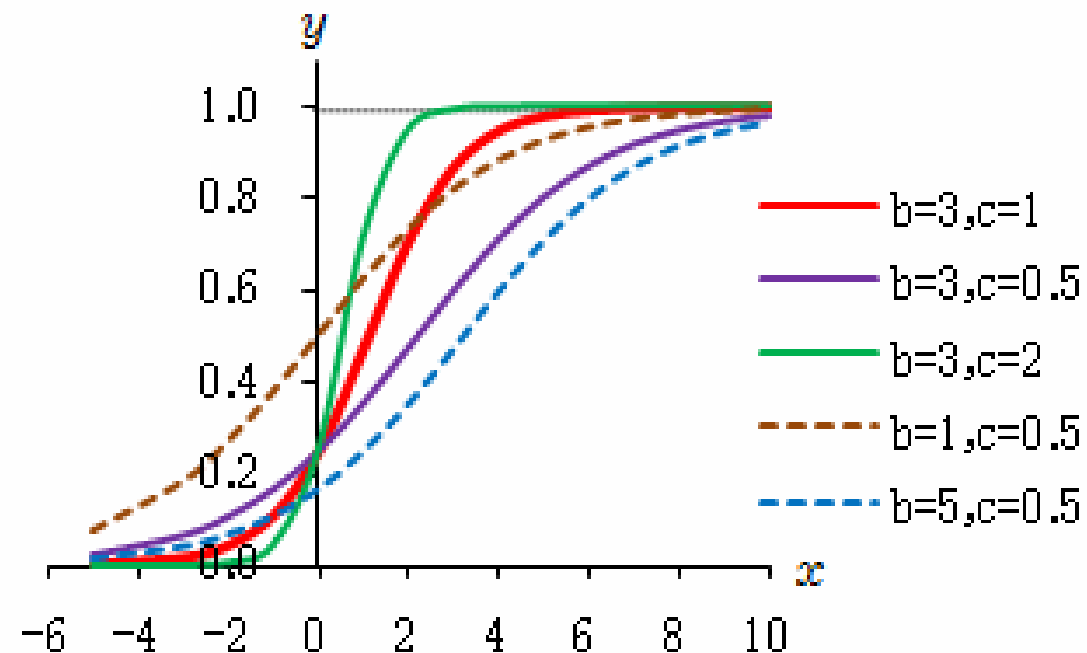
年度	x	出荷台数 Y
	7	1.973
	8	2.199
	9	2.369
	10	2.932
	11	3.369
	12	3.473



非線形回帰において変換式の選択

ロジスティック曲線

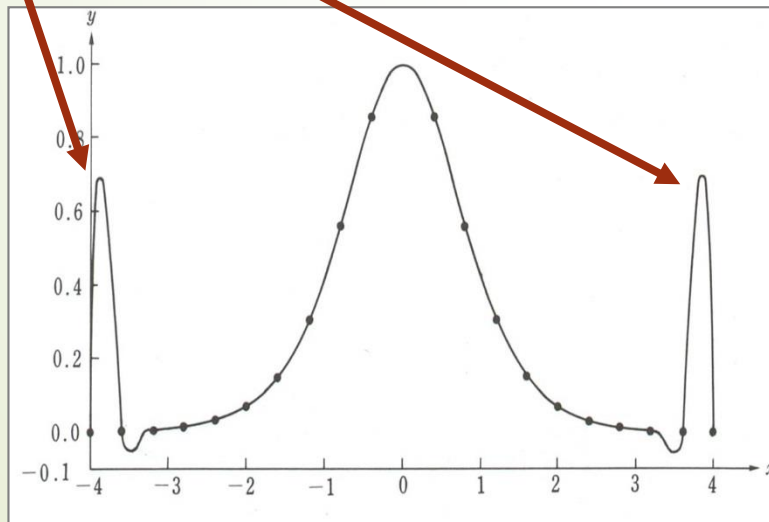
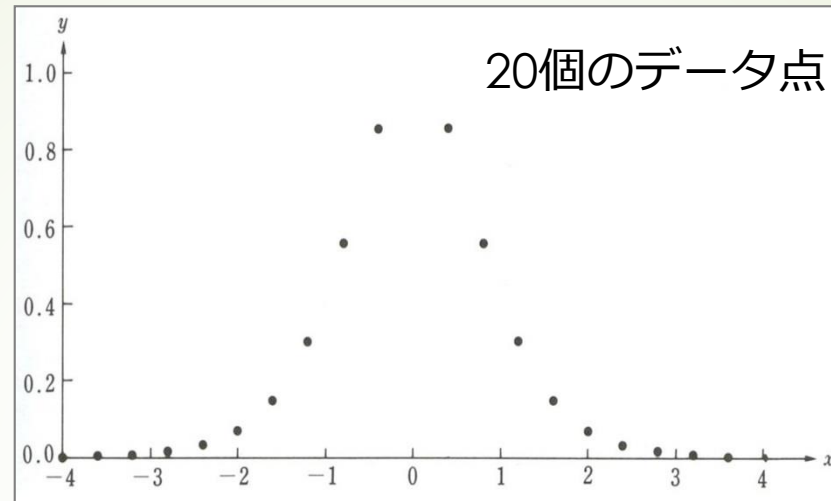
$$\hat{y} = \frac{\gamma}{1 + e^{a + \beta x}}$$



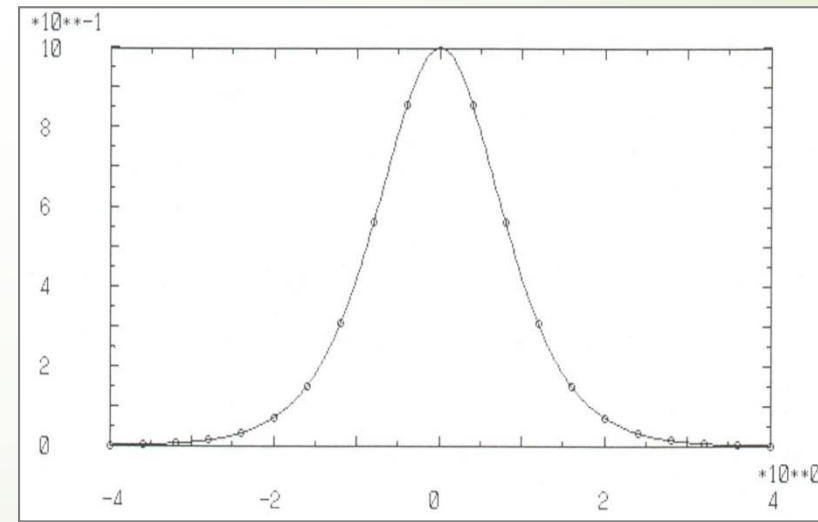
ロジスティック関数は成長曲線とかシグモイド曲線にも利用される

スプライン関数の有用性

ルンゲ現象



ラグランジュ多項式による曲線



3 次のスプライン関数による曲線

主成分分析

主成分分析の考え方 : 新たな視点 (新変量) を探しデータの個性を観察する

(例題) 下表のように10人の身長、体重、胸囲の資料を主成分分析する。

番号	身長	体重	胸囲
1	177.7	68.1	91.8
2	168.0	60.2	89.3
3	165.3	49.1	84.9
4	159.1	42.0	86.3
5	176.4	73.3	93.8
6	176.0	57.2	92.5
7	170.0	59.8	89.8
8	164.6	51.6	88.5
9	174.4	70.2	91.7
10	174.8	58.8	91.6

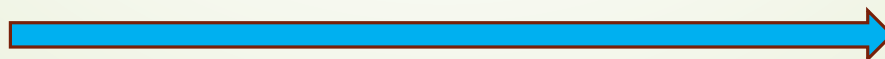
新変量 $u = a \times \text{身長} + b \times \text{体重} + c \times \text{胸囲}$

条件 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を付ける

新変量 u の分散 s^2 が最大になるように
定数 a, b, c を求める。



$u = 0.50 \times \text{身長} + 0.84 \times \text{体重} + 0.22 \times \text{胸囲}$



番号	新変量u (主成分得点)
1	166.0
2	154.0
3	142.4
4	133.7
5	170.2
6	156.2
7	154.8
8	144.9
9	166.1
10	156.8

主成分分析の評価

寄与率 C

=

主成分の分散

身長の分散

体重の分散

胸囲の分散

$$\text{寄与率 } C = \frac{\text{主成分の分散}}{\text{分散の総和}} \quad (0 \leq C \leq 1)$$

$$u = 0.50 \times \text{身長} + 0.84 \times \text{体重} + 0.22 \times \text{胸囲}$$

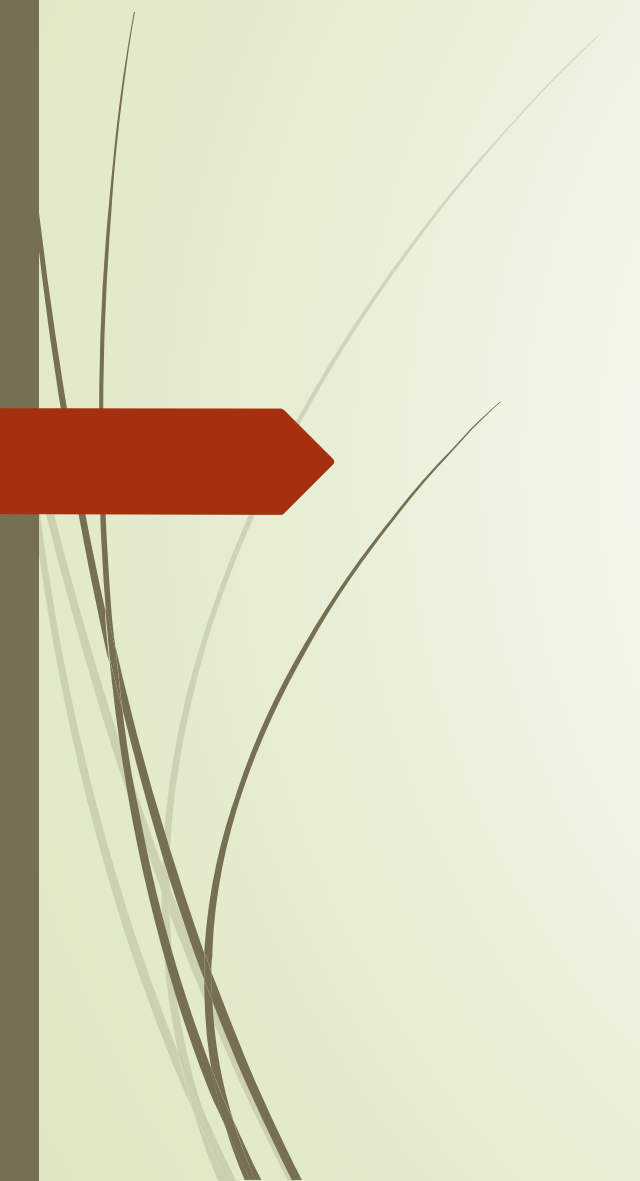
寄与率 $C = 0.93$



第1主成分を搾り取ったカス
から第2成分を搾り取る



番号	新変量 u (主成分得点)
1	166.0
2	154.0
3	142.4
4	133.7
5	170.2
6	156.2
7	154.8
8	144.9
9	166.1
10	156.8



推測統計学

大数の法則と中心極限定理

(大数の法則)

n が大きいときサンプル平均 $\bar{X}_n$ は真の平均 μ に近づく

(中心極限定理)

n が大きいときサンプル平均と真の平均の差： $\bar{X}_n - \mu$ が従う分布は平均 0, 分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に近づく



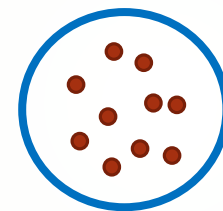
サイコロの目の母集団

1 5 4 1 2 6 2 5 4
2 3 4 6 1 5
4 2 5 1 6
2 5 4 1 2 6 2 5 4
2 3 4 6 3 5
4 2 5 1 6
5 2 4 5 1 6 4 3

母平均： 3.5

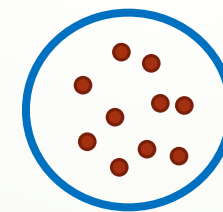
母分散： $\frac{35}{12}$

100個



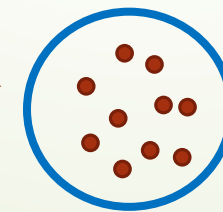
標本平均が3.67

100個



標本平均が3.54

100個



標本平均が3.31

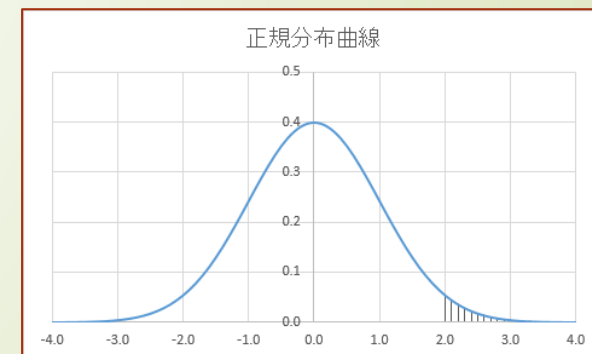
$$\bar{X} = X_1 + X_2 + X_3 \cdots X_{100}$$

⋮

$\bar{X}_n$

$\bar{X}_n - \mu$

$$N(0, \frac{\sigma^2}{n})$$



統計的な検定の考え方

1. 帰無仮説（否定したい仮説）
2. 対立仮説（主張したい仮説）
3. 有意水準の決定（通常5%または1%が利用される）
4. 検定統計量の算出
5. 棄却域との比較
6. 結論

（結論の表現方法）

有意水準5%で有意、危険率5%で有意、有意水準5%で帰無仮説を棄却(reject)する

有意水準5%で有意ではない、危険率5%で有意ではない、有意水準5%で帰無仮説を保留する



実験結果をそのまま素直に信頼して結論すると間違ってしまう危険性が大きいので、
はっきりした結論は保留する

片側検定と両側検定

(例題)

Aの工場で生産されている電池の寿命時間は μ_0 は、母平均 μ を越える

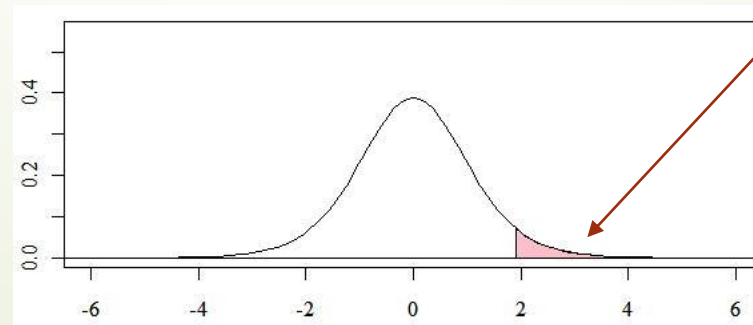
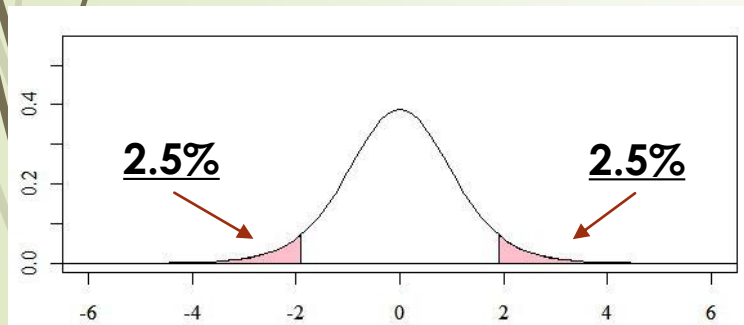
上記仮説を証明したい場合、以下のような帰無仮説を立てたとします。

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

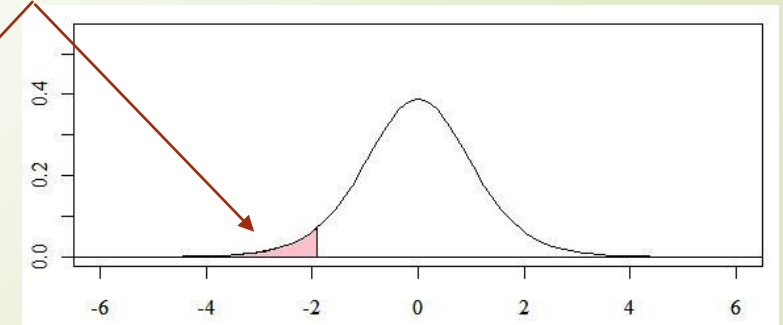
では、対立仮説は？

このとき対立仮説としては以下の3つが考えられます。

- | | | | | | |
|---------|-------|---|------------------|-------|-----|
| 対立仮説その1 | H_1 | : | $\mu \neq \mu_0$ | | I |
| 対立仮説その2 | H_1 | : | $\mu > \mu_0$ | | II |
| 対立仮説その3 | H_1 | : | $\mu < \mu_0$ | | III |



5%



p 値とは

p 値 : 統計量 (確率変数) がデータから計算した統計量の値より極端な値を取る確率

p 値と有意水準の定義より,
 p 値 < 有意水準 $\Leftrightarrow$ 帰無仮説を棄却となります。

つまり, 帰無仮説が棄却されるような有意水準の限界値が p 値です。

(例) 2000年の全国の小学校5年生の平均身長は148.5cm、分散は 7.8^2 でした。今年の児童を無作為に100名抽出したところ、150.0cmでした。

帰無仮説 : 平均身長は148.5cmである
対立仮説 : 平均身長は148.5cmより大きい

有意水準を5%とする

右片側検定なので、標本平均150.0の
「右側 p 値」を求めます。

P 値 = 0.0272 $\dots$ = 2.7%

第一種の過誤と第二の種過誤

第一種の過誤：帰無仮説が正しいにもかかわらず棄ててしまいます過誤
第二種の過誤：帰無仮説が誤りにもかかわらず、棄てられない過誤

正しい仮説

棄ててしまった！

第一種の過誤



棄てそこなった！

間違った仮説

第二種の過誤



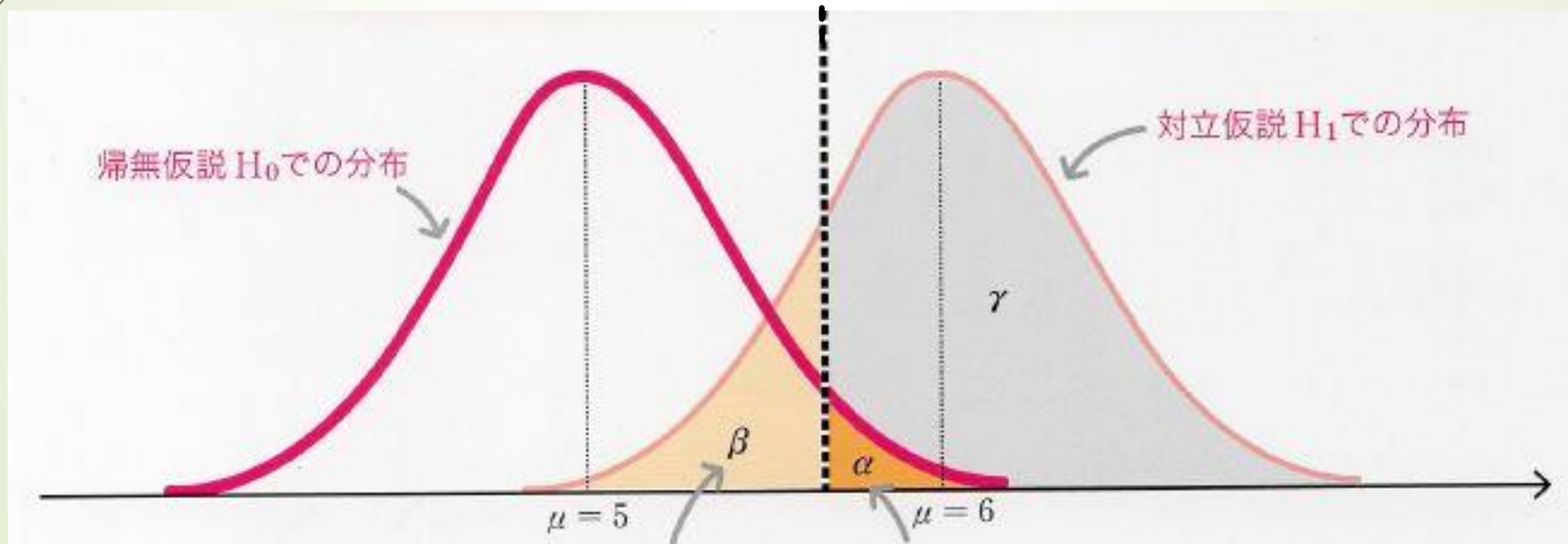
過誤の検出力

検出力 $\gamma = 1 - (\text{第二種の過誤の確率 } \beta)$

$$\beta + \gamma = 1$$

帰無仮説を棄却しない ←

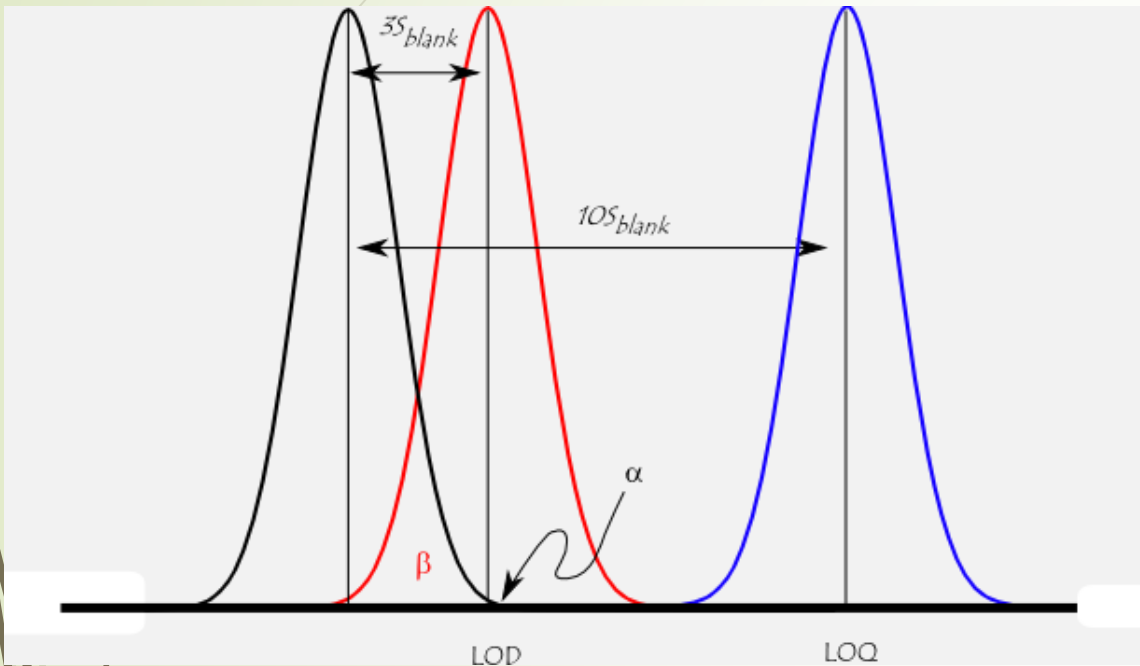
→ 帰無仮説を棄却する



第二種の過誤を犯す「確立 β 」

第一種の過誤を犯す「確立 α 」

臨床化学で用いる検出感度



(LOQ算出方法)

- 2SD法
- 希釈法
- P.P.法 (precision profile法)

➤ 分析化学分野では検出限界 (LOD) と定量限界 (LOQ) を分けて定義している。

➤ 黒線はブランク測定の実測値

➤ 赤線は実際の測定物の量が検出限界とちょうど同じときの検出値の分布。

α : 第一種過誤 (1%程度)

対象物質が存在しないにもかかわらず、存在すると誤判断する確率

β : 第二種過誤 (最大50%)

対象物質が存在するにもかかわらず、存在しないと誤判断する確率

(小さな標本) 母平均の検定 (t 検定)

(例題)

ある工場の生産ラインで、ペットボトル内容量が500mlの製品を作っています。そのラインから9本を無作為抽出したところ、標本平均は501.0mlでした。このラインで製造されている内容量は500mlより大きいといえるか？

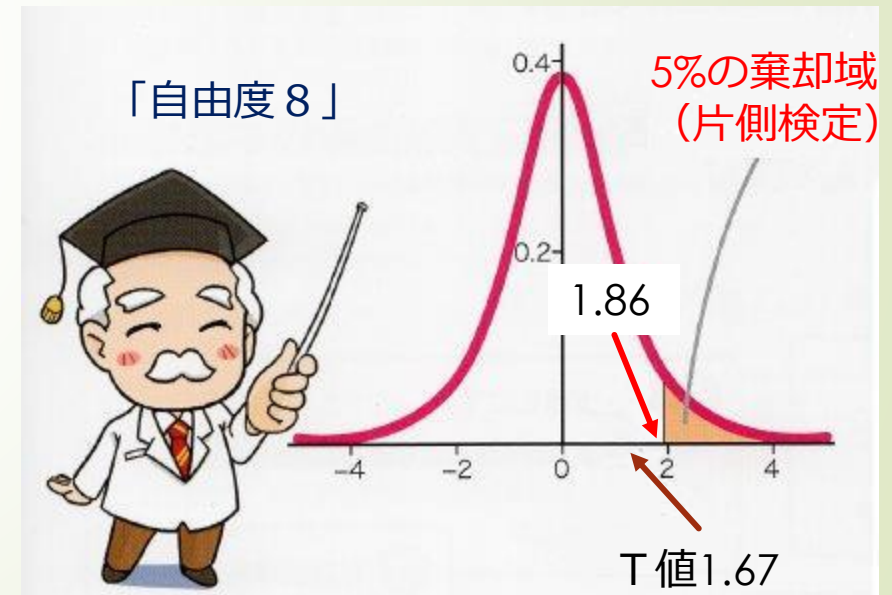
No	内容量
1	502.2
2	501.6
3	499.8
4	502.8
5	498.6
6	502.2
7	499.2
8	503.4
9	499.2

帰無仮説：内容量は500mlである
対立仮説：内容量は500mlより大きい

優位水準 5%

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (\bar{X} \text{ は標本平均})$$

T = 1.67 したがって 1.86 > T



仮説は棄却できない

独立性の検定（ χ^2 検定）

（例）

ある人気タレントの好き嫌いについてアンケート調査を行なった。好き嫌いに男女差はあるか？

タレントGの評価

	好き	嫌い
男性	331	217
女性	315	352

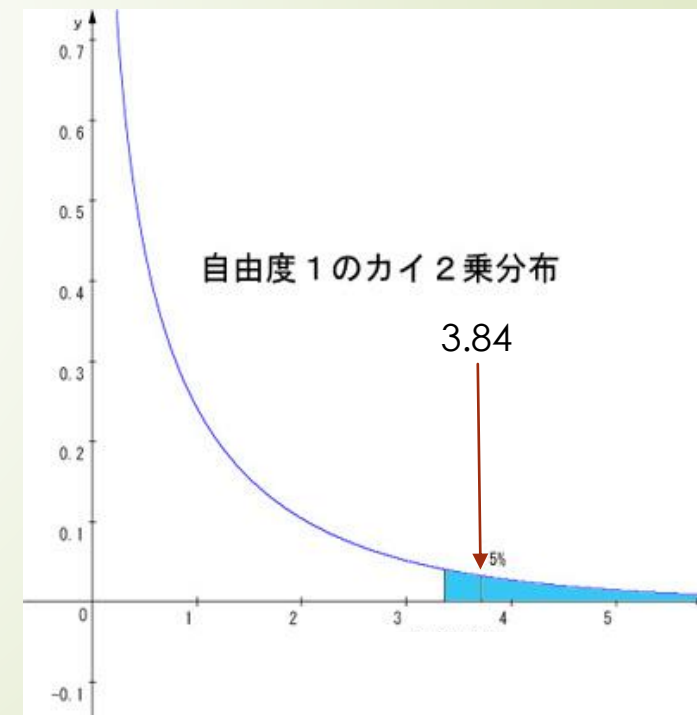
期待度数

	好き	嫌い	計
男性	291.4	256.6	548
女性	354.6	312.4	667
計	646	569	1215

帰無仮説：タレントGの好嫌は男女によって変わらない
対立仮説：タレントGの好嫌は男女によって異なる

$$z = \frac{(331 - 291.4)^2}{291.4} + \frac{(217 - 256.6)^2}{256.6} + \frac{(315 - 354.6)^2}{354.6} + \frac{(352 - 312.4)^2}{312.4} = 20.97$$

$\chi^2 > 3.84$ (危険率5%) $\longrightarrow \therefore$ **帰無仮説は棄却される**



一元配置分散分析 その1

(例題) 新種の米と肥料A、B、Cとの相性を調べる

	肥料		
区画	A	B	C
1	49	56	51
2	47	54	55
3	46	61	57
4	50	57	53
グループ平均	48Kg	57Kg	54Kg

(全体)
平均53Kg

各データの値

全体平均	グループ間偏差	グループ内偏差
------	---------	---------

要因の違いによる効果

統計誤差

全体平均

	肥料		
区画	A	B	C
1	53	53	53
2	53	53	53
3	53	53	53
4	53	53	53

元の資料の平均値

グループ間偏差

	肥料		
区画	A	B	C
1	-5	4	1
2	-5	4	1
3	-5	4	1
4	-5	4	1

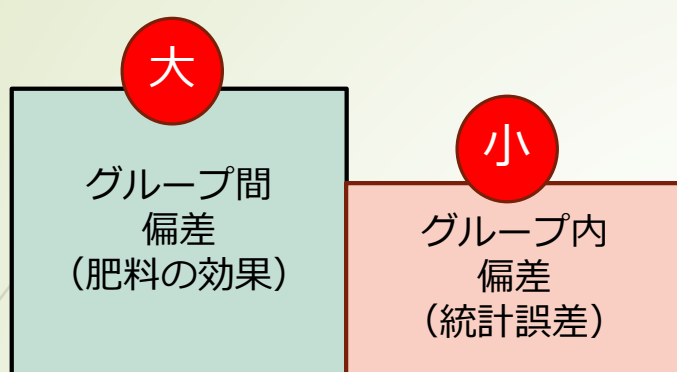
「グループ平均」48から「全体平均」53を引いた値

グループ内偏差

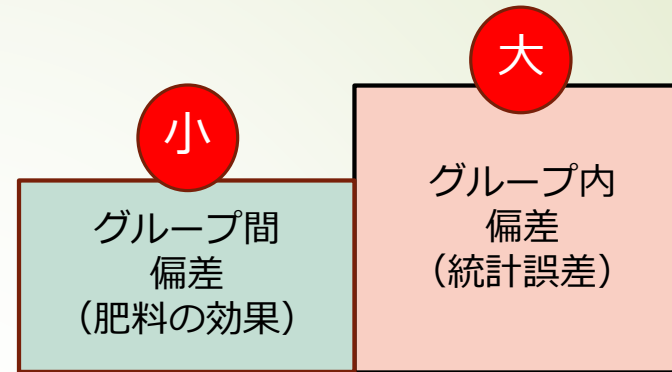
	肥料		
区画	A	B	C
1	1	-1	-3
2	-1	-3	1
3	-2	4	3
4	2	0	-1

「データ値」49から「グループ平均」48を引いた値

一元配置分散分析 その2



要因の効果あり



結果は偶然

各表の中のデータの持つ自由度

グループ間偏差

	肥料		
区画	A	B	C
1	-5	4	1
2	-5	4	1
3	-5	4	1
4	-5	4	1

=0

(グループ平均) - (全体平均)

グループ内偏差

	肥料		
区画	A	B	C
1	1	-1	-3
2	-1	-3	1
3	-2	4	3
4	2	0	-1

=0

(各データ) - (グループ平均)

公式

グループ間偏差の自由度 = グループ数 - 1

グループ内偏差の自由度
= グループ数 × (グループ内のデータ数 - 1)

- ・ グループ間偏差の自由度 = 2
- ・ グループ内偏差の自由度 = 9

一元配置分散分析 その3

公式

$$\text{普遍分散} = \frac{\text{「偏差平方」の和}}{\text{自由度}}$$

グループ間偏差

	肥料		
区画	A	B	C
1	-5	4	1
2	-5	4	1
3	-5	4	1
4	-5	4	1

偏差平方和 $\longrightarrow Q_1 = 168$

普遍分散 $\longrightarrow S_1^2 = \frac{Q_1}{2} = \frac{168}{2} = 84$

グループ内偏差

	肥料		
区画	A	B	C
1	1	-1	-3
2	-1	-3	1
3	-2	4	3
4	2	0	-1

$Q_1 = 56$

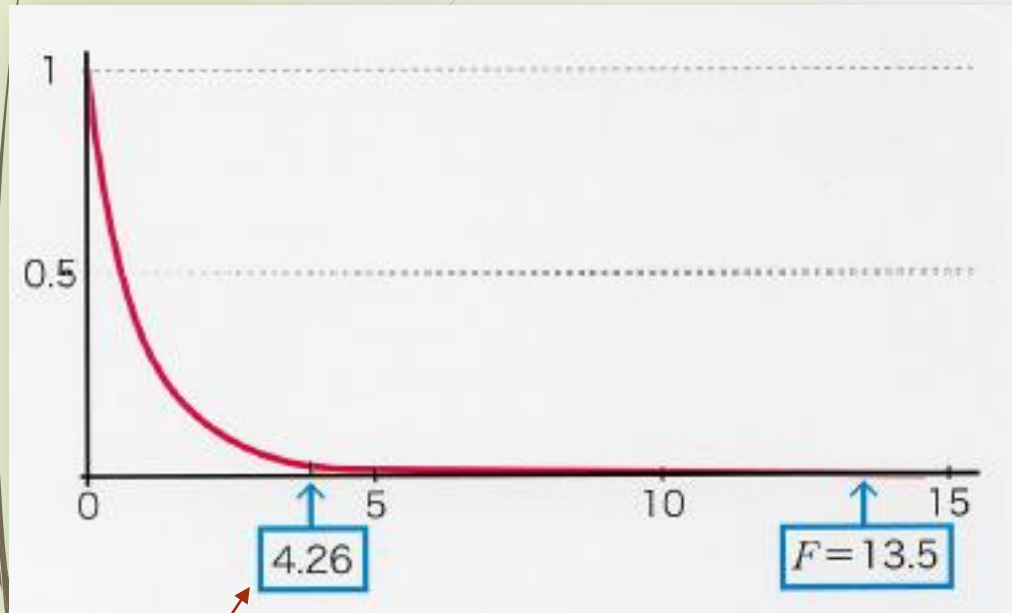
$S_2^2 = \frac{Q_2}{9} = \frac{56}{9} = 6.22$

正規母集団から抽出した「2つの標本」について、それらから算出した普遍分散を S_1^2 、 S_2^2 とする。 S_1^2 、 S_2^2 の自由度が順に k_1 、 k_2 とするとき、次の量 F は自由度 k_1 、 k_2 の F 分布に従う。

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \longrightarrow F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{84}{6.22} = 13.5$$

棄却域 $F \geq 4.26$

一元配置分散分析 その4



5%点

帰無仮説 H_0 : 肥料の違いの効果はない (S_2^2 が大きい)

対立仮説 H_1 : 肥料の違いの効果はある (S_1^2 が大きい)

棄却域 $F = 13.5 \geq 4.26$

したがって、帰無仮説は棄却

「肥料の違いの効果はある」

変動要因	変動	自由度	分散	F値	p 値	5%点
グループ間	168	2	84	13.5	0.002	4.26
グループ間内	56	9	6.22			
合計	224	11				

F分布は「普遍分散の比」に関する分布である。

検定法のまとめ

1. 独立した2群の差の検定

- (1) 独立した2群の平均値の差の検定
- (2) 独立した2群の順位の差の検定

: t 検定
: Mann-Whitney
(マン・ホイットニー検定)

2. 対応ある2群の差の検定

- (1) 対応ある平均値の差の検定
- (2) 対応ある順位の差の検定

: t 検定
: Wilcoxon signed rank test
(ウイルコクソンの符号付き順位検定)

3. 独立した多群の差の検定

- (1) 独立した多群の平均値の差の検定
- (2) 独立した多群の順位の差の検定

: 一元配置分散分析
: Kruskal-Wallis test
(クラスカル・ワリス検定)

4. 独立性の検定

: χ^2 検定、Fisherの検定

不合理に迷い込む

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

両辺に a を乗じる

両辺に $a^2 - 2ab$ を加える

$$a^2 + (a^2 - 2ab) = ab + (a^2 - 2ab)$$

$$2a^2 - 2ab = a^2 - ab \quad \rightarrow \quad 2(a^2 - ab) = a^2 - ab$$

$$\therefore 2 = 1$$

数学者の小話

スコットランドを**天文学者**と**物理学者**と**数学者**の3人で列車の旅をしていた時の話です。

車窓から原っぱを眺めると1匹の黒い羊が目にとまりました。

(天文学者)

(物理学者)

(数学者)

スコットランドには少なくとも1つの原っぱが存在し、その原っぱには少なくとも1頭の羊が含まれ、その羊の少なくとも一方の面は黒いと言う事さ！！